№ группы	Задание
	Задание для студентов гр. 2.1 на период с 24.03.2020 – 11.04.2020 (6 часов) Дисциплина «Математика» Преподаватель Токарская М.С. Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru Тел. 89147174421 – WhatsApp
2.1/1.1	1. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf - учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. 2. Лекции – см.Приложение 1 Задания: 1. Переписать лекции и **выучить основные определения**: a. Угол в 1 радиан b. Формулы перевода угловых мер из градусов в радианы c. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента d. Знаки функций в разных четвертях координатной плоскости e. Период каждой функции f. Какие из тригонометрических- функций являются четными, а какие нечетными g. Выписать из учебника или Интернета таблица значений тригонометрических функций некоторых углов. **2. Решить номер 1, 2, 3 в учебнике**

Приложение 1.

Лекция 1 «Основы тригонометрии. Градусная и радианная мера угла»

Тригонометрия - слово греческое и в буквальном переводе означает измерение треугольников. В данном случае измерение треугольников следует понимать, как решение треугольников, т.е. определение сторон, углов и других элементов треугольника, если даны некоторые из них.

Большое количество практических задач, а также задач планиметрии, стереометрии, астрономии и других сводятся к задаче решения треугольников. Возникновение тригонометрии связано с измерениями на местности, астрономическими наблюдениями, архитектурой и строительством.

Тригонометрические функции определены в курсе математики как функции угла. В то же время разные задачи математики, физики, экономики и других наук, приводят к тригонометрическим функциям, аргументами которых есть не углы, а другие величины (длина, время, температура, и так далее). Поэтому в математике тригонометрические функции рассматривают как функции числового аргумента, которые в первую очередь используют для описания разнообразных периодических процессов.

Существуют два типа мер углов: градусная и радианная.

Углом в 1 градус называют 1/180 часть развернутого угла.

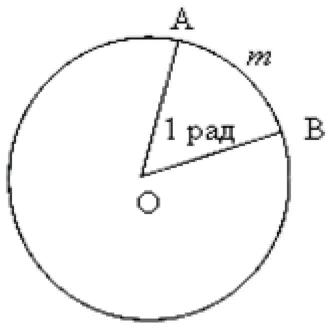
С этой мерой углов вы уже знакомы.

Радианная мера. Как известно из планиметрии, длина дуги l, радиус r и соответствующий центральный угол α связаны соотношением: $\alpha = l / r$.

Эта формула находится в основе определения радианной меры измерения углов. То есть, если $l = r$, значит, $\alpha = 1$, и говорится, что угол α равняется одному радиану, и обозначают так: $\alpha = 1$ рад.

Т.о., мы получаем определение **радианной меры измерения**:

Радиан - это центральный угол, у которого длина дуги и радиус имеют равные величины ($AmB = AO$).



Значит, **радианная мера измерения угла** - это отношение длины дуги, которая проведена произвольным радиусом и заключёна между сторонами этого угла, к радиусу дуги.

Из этой формулы, длину окружности C и радиус r этой окружности выражаем так: $\boldsymbol{2 = C / r}$.

Таким образом, полный оборот, который равен 360° в градусном измерении, равен двум в радианном измерении. Отсюда выводим значение 1-го радиана:

$$1 \text{ рад} = \frac{360°}{2\pi} \approx 57°, 2958 \approx 57°17'45''.$$

Обратно:

$$1° = \frac{2\pi}{360°} \approx 0.017453 \text{ рад}.$$

Рассмотрим примеры перехода от радианной меры к градусной и наоборот.

Пример 1. Выразите в радианах величины углов 30°; 45°; 60°; 90°.

Разделив левую и правую части равенства: 180° = π рад последовательно на 6, 4, 3, 2, получаем: 30° = $\frac{\pi}{6}$ рад, 45° = $\frac{\pi}{4}$ рад, 60° = $\frac{\pi}{3}$ рад; 90° = $\frac{\pi}{2}$ рад.

Пример 2. Выразите в градусах величины углов: $\frac{\pi}{10}$ рад; $\frac{\pi}{5}$ рад; $\frac{\pi}{12}$ рад; $\frac{\pi}{18}$ рад.

Разделив левую и правую части равенства : $180° = \pi$ рад, последовательно на 10; 5; 12; 18, получаем: $\frac{\pi}{10}$ рад = 18º; $\frac{\pi}{5}$ рад = 36º; $\frac{\pi}{12}$ рад = 15º; $\frac{\pi}{18}$ рад = 10º.

Радианная мера угла удобна для вычисления длины дуги окружности. **Так как угол в 1 радиан стягивает дугу, длина которой равняется R,**
то угол в α радиан стягивает дугу длиной: $l = \alpha R$.

Если радиус круга равен единице, то $l = \alpha$, то есть длина дуги равна величине центрального угла, который опирается на эту дугу в радианах.

<u>Единичная окружность.</u>

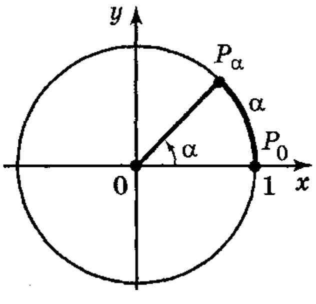
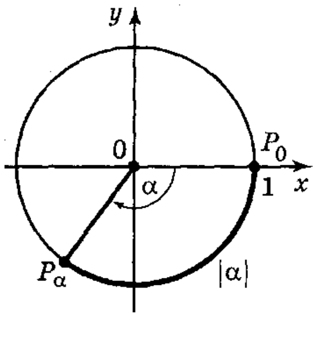


Рис.1

Рассмотрим на координатной плоскости окружность радиуса 1 с центром в начале координат, которая называется единичной (рис. 1). Обозначим точку P_o - правый конец горизонтального диаметра. Поставим в соответствие каждому действительному числу α точку окружности по такому правилу:

1) Если $\alpha > 0$, то, двигаясь по кругу с точки P_o в направлении против часовой стрелки **(положительное направление обхода окружности),** опишем по окружности путь длиной α конечная точка этого пути и будет искомой точкой P_α.

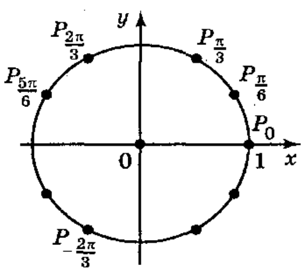


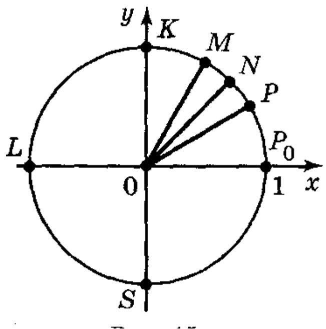
2) Если $\alpha < 0$, то, двигаясь из точки P_o (рис. 4) в направлении по часовой стрелке **(отрицательное направление),** опишем по окружности путь длиной $|\alpha|$; конец этого пути и будет искомой точкой P_α.

3) Если $\alpha = 0$, то поставим в соответствие точку P_o.

Таким образом, каждому вещественному числу можно поставить в соответствие точку *P_0* единичной окружности.

Если $\alpha = \alpha_o + 2\pi k$, где k -целое число, то при повороте на угол α получаем одну и ту же точку, что и при повороте на угол α_o .





Если точка P соответствует числу α, то она соответствует и всем числам вида α+ 2πk, где 2π - длина окружности (потому что радиус равен 1), а k -целое число, которое показывает количество полных обходов окружности в ту или другую сторону.

336. Записать в градусной мере углы: а) $\pi/6$; б) $\pi/8$; в) $3\pi/4$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

а) $\alpha = \frac{180°(\pi/6)}{\pi} = \frac{180°}{6} = 30°$;

б) $\alpha = \frac{180°(\pi/8)}{\pi} = \frac{180°}{8} = 22°30'$;

в) $\alpha = \frac{180°(3\pi/4)}{\pi} = \frac{180°\cdot 3\pi}{\pi\cdot 4} = 135°$.

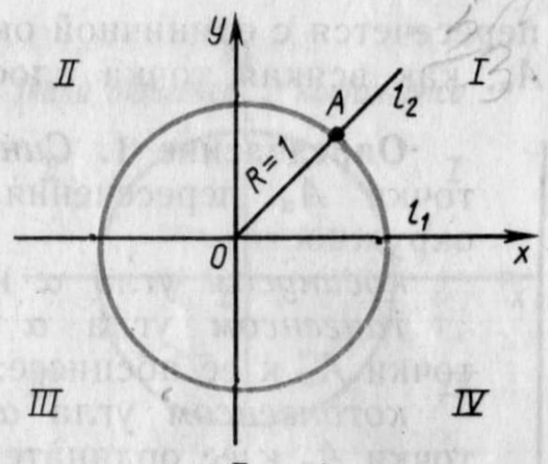


Рис. 1

337. Записать в радианной мере углы: а) 30°; б) 45°; в) 315°; г) 540°.

Решение. Используя формулу (2), находим:

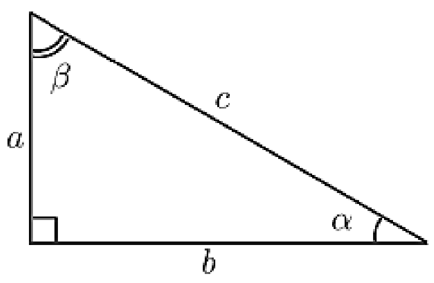
а) $\alpha = \frac{\pi\cdot 30°}{180°} = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{\pi\cdot 45°}{180°} = \frac{\pi}{4}$;

в) $\alpha = \frac{\pi\cdot 315°}{180°} = \frac{\pi\cdot 7}{4} = \frac{7\pi}{4}$; г) $\alpha = \frac{\pi\cdot 540°}{180°} = 3\pi$.

Приложение 2.

Лекция 2. Тригонометрические функции числового и углового аргумента: определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

Проследим за тем, как формируются представление о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе в школьном курсе математики. На уроках геометрии дается определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике.



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$

Определение.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Определение.

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Определение.

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к прилежащему.

Определение.

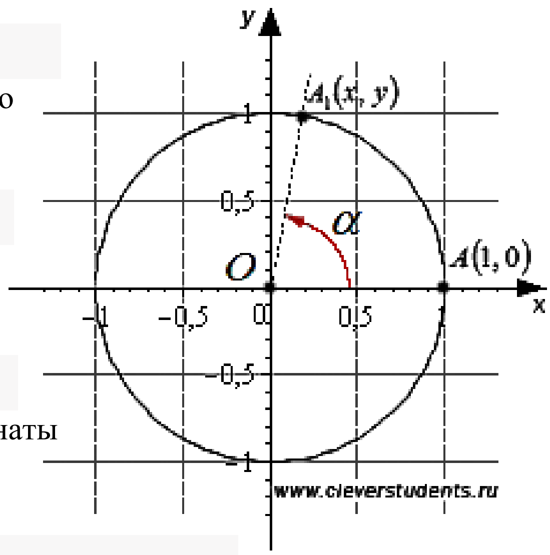
Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего катета к противолежащему.

В тригонометрии на угол начинают смотреть более широко - вводят понятие **<u>угла поворота</u>.** Величина угла поворота, в отличие от острого угла, не ограничена рамками от *0* до *90* градусов, угол поворота в градусах (и в радианах) может выражаться каким угодно действительным числом от $-\infty$ до $+\infty$.

В этом свете дают определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса уже не острого угла, а угла произвольной величины - угла поворота. Они даются через координаты x и y точки A_1, в которую переходит так называемая начальная точка $A(1,\ 0)$ после ее поворота на угол α вокруг точки O – начала прямоугольной декартовой системы координат и центра <u>единичной окружности</u>.

Определение.

Синус угла поворота α - это ордината точки A_1, то есть, ***sinα=y.***



Определение.

Косинусом угла поворота α называют абсциссу точки A_1, то есть, ***cosα=x.***

Определение.

Тангенс угла поворота α - это отношение ординаты точки A_1 к ее абсциссе, то есть, $\boldsymbol{tg\alpha=\frac{y}{x}}$.

Определение.

Котангенсом угла поворота α называют отношение абсциссы точки A_1 к ее ординате, то есть, $\boldsymbol{ctg\alpha=\frac{x}{y}}$

Дальше возникает потребность отвязаться от углов и дать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа, а не угла.

<u>Определение.</u>

<u>Синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом числа *t* называют число, равное синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу угла поворота в *t* радианов соответственно.</u>

Теперь переходим к определениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа t. Допустим, что числу t соответствует точка окружности $A_1(x,\ \ y)$ (например, числу $\frac{\pi}{2}$ отвечает точка $A_1(0, 1)$).

Определение.

Синусом числа t называют ординату точки единичной окружности, соответствующей числу t, то есть, $sint=y$.

Определение.

Косинусом числа t называют абсциссу точки единичной окружности, отвечающей числу t, то есть, $cost=x$.

Определение.

Тангенсом числа t называют отношение ординаты к абсциссе точки единичной окружности, соответствующей числу t, то есть, $tgt=y/x$. В другой равносильной формулировке тангенс числа t – это отношение синуса этого числа к косинусу, то есть, $tgt=sint/cost$.

Определение.

Котангенсом числа t называют отношение абсциссы к ординате точки единичной окружности, соответствующей числу t, то есть, $ctgt=x/y$. Другая формулировка такова: тангенс числа t – это отношение косинуса числа t к синусу числа t: $ctgt=cost/sint$.

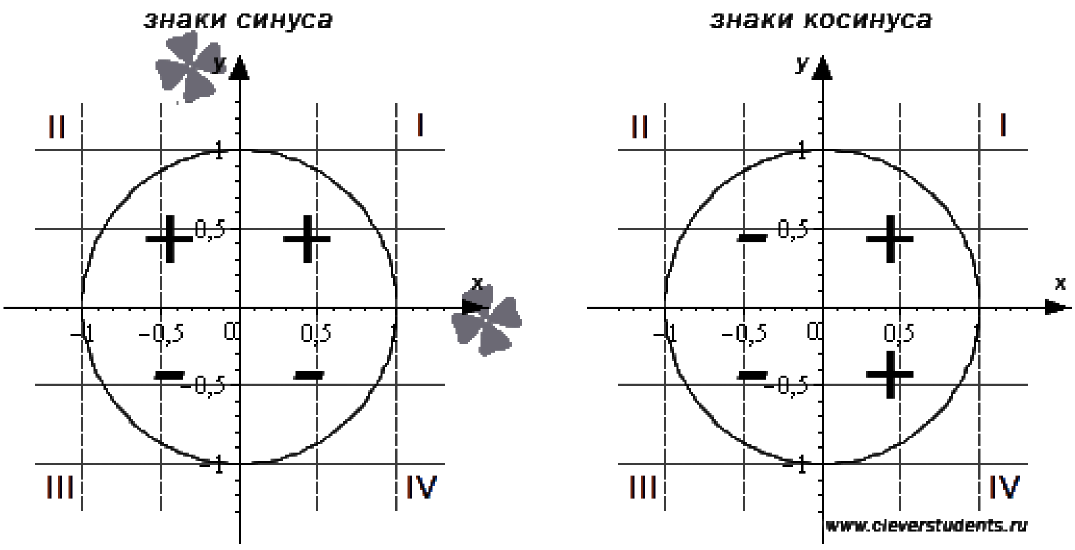
<u>Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям</u>

Давайте разберемся, какие знаки имеют значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла поворота α в зависимости от того, углом какой четверти является α.

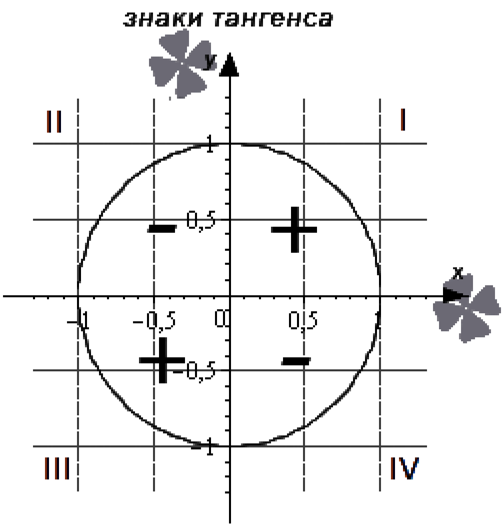
Для синуса и косинуса это сделать просто.

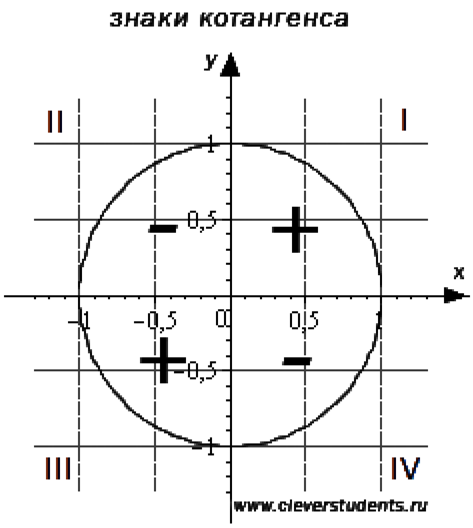
По определению синус угла α - это ордината точки A_1. Очевидно, что в *I* и *II* координатных четвертях она положительна, а в *III* и *IV* четвертях – отрицательна. Таким образом, синус угла α имеет знак плюс в *I* и *II* четвертях, а знак минус – в *III* и *VI* четвертях.

В свою очередь косинус угла α - это абсцисса точки A_1. В *I* и *IV* четвертях она положительна, а во *II* и *III* четвертях – отрицательна. Следовательно, значения косинуса угла α в *I* и *IV* четвертях положительны, а во *II* и *III* четвертях – отрицательны.



Чтобы определить знаки по четвертям тангенса и котангенса нужно вспомнить их определения: тангенс – это отношение ординаты точки A_1 к абсциссе, а котангенс – отношение абсциссы точки A_1 к ординате. Тогда из *правил деления чисел* с одинаковыми и разными знаками следует, что тангенс и котангенс имеют знак плюс, когда знаки абсциссы и ординаты точки A_1 одинаковые, и имеют знак минус – когда знаки абсциссы и ординаты точки A_1 различны. Следовательно, тангенс и котангенс угла имеют знак + в *I* и *III* координатных четвертях, и знак минус – во *II* и *IV* четвертях.





Переходим к следующему свойству синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Свойство периодичности

Сейчас мы разберем, пожалуй, самое очевидное свойство синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла. Оно состоит в следующем: при изменении угла на целое число полных оборотов значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса этого угла не изменяются.

Это и понятно: при изменении угла на целое число оборотов мы из начальной точки A всегда будем попадать в точку A_1 на единичной окружности, следовательно, значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса остаются неизменными, так как неизменны координаты точки A_1.

С помощью формул рассматриваемое свойство синуса, косинуса, тангенса и котангенса можно записать так:

$$\sin(\alpha+2\cdot\pi\cdot n)=\sin\alpha,$$
$$\cos(\alpha+2\cdot\pi\cdot n)=\cos\alpha,$$
$$tg(\alpha+2\cdot\pi\cdot n)=tg\alpha,$$
$$ctg(\alpha+2\cdot\pi\cdot n)=ctg\alpha,$$

где α - угол поворота в радианах, **n– любое** целое число, абсолютная величина которого указывает количество полных оборотов, на которые изменяется угол α, а знак числа z указывает направление поворота.

Если же угол поворота α задан в градусах, то указанные формулы перепишутся в виде $\sin(\alpha+360°\cdot z)=\sin\alpha$, $\cos(\alpha+360°\cdot z)=\cos\alpha$, $tg(\alpha+360°\cdot z)=tg\alpha$, $ctg(\alpha+360°\cdot z)=ctg\alpha$.

Приведем примеры использования этого свойства.

Например,

$\sin\frac{13\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{5}$, так как $\frac{13\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}+2\pi$, а $\sin\left(\frac{3\pi}{5}+2\pi\right)=\sin\frac{3\pi}{5}$.

$tg(-689°)=tg(31°+360°\cdot(-2))=tg31°$ или

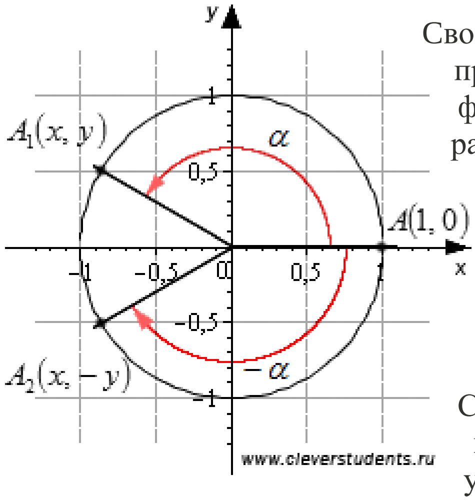
$tg(-689°)=tg(-329°+360°\cdot(-1))=tg(-329°)$.

Это свойство вместе с формулами приведения очень часто используется при вычислении значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса «больших» углов.

Рассмотренное свойство синуса, косинуса, тангенса и котангенса иногда называют свойством периодичности.

Свойства синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов противоположных углов

Пусть A_1 – точка, полученная в результате поворота начальной точки $A(1,\ 0)$ вокруг точки O на угол α, а точка A_2 – это результат поворота точки A на угол $-\alpha$, противоположный углу α.



Свойство синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов противоположных углов базируется на достаточно очевидном факте: упомянутые выше точки A_1 и A_2 либо совпадают, либо располагаются симметрично относительно оси Ox. То есть, если точка A_1 имеет координаты (x, y), то точка A_2 будет иметь координаты $(x, -y)$. Отсюда по определениям синуса, косинуса, тангенса и котангенса записываем равенства

$$\sin\alpha = y, \quad \cos\alpha = x, \quad tg\alpha = \frac{y}{x}, \quad ctg\alpha = \frac{x}{y}$$

Сопоставляя их, приходим к соотношениям между синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами противоположных углов α и $-\alpha$ вида:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ &\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ &tg(-\alpha) = -tg\alpha \\ &ctg(-\alpha) = -ctg\alpha \end{aligned}}$$

Это и есть рассматриваемое свойство в виде формул.

Приведем примеры использования этого свойства. Например, справедливы равенства $\sin(-34^\circ) = -\sin 34^\circ$, $ctg\,\frac{\pi}{7} = -ctg\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ и $\cos(-10^\circ) = \cos 10^\circ$.

Остается лишь заметить, что свойство синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов противоположных углов, как и предыдущее свойство, часто используется при вычислении значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса, и позволяет полностью уйти от отрицательных углов.