# С 20.11.20г. -27.11. 20г. Гр. 4.1 Парикмахер. Математика

## Логарифмы и их свойства.

Показатель степени, в которую нужно что-то возвести называется логарифмом и обозначается log.

Число, которое мы возводим в степень, т.е. основание степени, называется основанием логарифма и записывается в нижнем индексе. Затем пишется число, которое мы получает, т.е. число, которое мы ищем: $log_5 25=2$

Эта запись читается так: «Логарифм числа 25 по основанию 5». Логарифм числа 25 по основанию 5- это показатель степени, в которую нужно возвести 5, чтобы получить 25. Этот показатель равен 2.

Аналогично разберём второй пример.

Дадим определение логарифма.

**Определение**. *Логарифмом числа* $\mathbf{b>0}$ *по основанию* $\mathbf{a>0,\ a \neq 1}$ *называется показатель степени, в которую надо возвести число* **a,** *чтобы получить число* **b.**

Логарифмом числа $b$ по основанию $a$ обозначается $log_a\, \mathbf{b}$

Рассмотрим примеры:

$log_3 27=3;$ $log_5 25=2;$ $log_{25} 5=1/2;$

$log_5\, 1/125=-3;$ $log_{-2}(-8)$- *не существует;* $log_5 1=0;$ $log_4 4=1$

Рассмотрим такие примеры:

$1^0.\ log_a 1=0,\ a>0,\ a \neq 1;$

$2^0.\ log_a a=1,\ a>0,\ a \neq 1.$

Эти две формулы являются свойствами логарифма. Ими можно пользоваться при решении задач.

Как перейти из логарифмического равенства к показательному? $log_a b=c$, $c$ – это логарифм, показатель степени, в которую нужно возвести $a$, чтобы получить $b$. Следовательно, $a$ степени $c$ равен $b$: $a^c= b$.

***Выведем основное логарифмическое тождество:*** $\mathbf{a^{\log_a b} = b}$.

Рассмотрим пример.

$\mathbf{5^{\log_5 13}}=13$

Рассмотрим ещё важные свойства логарифмов.

**Свойства логарифмов:**

$3°.\ log_a\, xy = log_a x + log_a y.$

$4°.\ log_a\, x/y = log_a x - log_a y.$

$5°.\ log_a x^p = p \cdot log_a x$, *для любого действительного p.*

Рассмотрим пример на проверку 3 свойства:

$log_2 8 + log_2 16= log_2\, 8\cdot16= log_2\, 128=7$

$3 +4 \quad = \quad 7$

Рассмотрим пример на проверку 5 свойства:

$3\cdot log_2 8= log_2 8^3= log_2 512 =9$

$3\cdot3 \quad = \quad 9$

**решить**

***Задание 1.*** Назовите свойство, которое применяется при вычислении следующих логарифмов, и вычислите :

- $log_6 6$
- $log_{0,5} 1$
- $log_6 3+ log_6 2$
- $log_3 6- log_3 2$
- $log_4 4^8$

***Задание 2.***

Перед вами 8 решённых примеров, среди которых есть правильные, остальные с ошибкой. Определите верное равенство (назовите его номер), в остальных исправьте ошибки.

1. ***$log_2 32 + log_2 2 = log_2 64 = 6$***
2. ***$log_5 5^3 = 2;$***
3. ***$log_3 45 - log_3 5 = log_3 40$***
4. ***$3 \cdot log_2 4 = log_2 (4 \cdot 3)$***
5. ***$log_3 15 + log_3 3 = log_3 45;$***
6. ***$2 \cdot log_5 6 = log_5 12$***
7. ***$3 \cdot log_2 3 = log_2 27$***
8. ***$log_2 16^2 = 8.$***

***Задание 3.***

Работа с учебником. №271, 275, 280,290(1,2), 291(1,2) Алимов

5. **Проверка ЗУН – самостоятельная работа по карточкам.**

Вычислите:

1. $\log_4 16$
2. $\log_{25} 125$
3. $\log_8 2$
4. $\log_6 6$

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**№ 1.** Вычислите: $log_{15}\sqrt[3]{225}$.

Решение:

Чтобы выполнить это задание нам понадобятся следующие определения и свойства:

1. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}};$
2. $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}};$
3. $log_a b^r = r \cdot log_a b$.

Представим $\sqrt[3]{225}$ в виде степени с рациональным показателем: $\sqrt[3]{225} = 225^{\frac{1}{3}}$. Далее воспользуемся свойством нахождения логарифма степени: $log_{15}\sqrt[3]{225} = log_{15}225^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}log_{15}225$. Вспоминаем таблицу квадратов: $225 = 15^2$, значит $log_{15}225 = 2$, $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$. Ответ: $\frac{2}{3}$.

**№ 2. Вычислите**

1. $\left(2^{log_2 15} + 3\right)^{log_{18} 28} : log_2 128$
2. $\left(log_{37} 5 + log_{37} 7{,}4 - 4^{log_2 5}\right) : log_{\frac{1}{3}} 81$
3. $\dfrac{log_{0,7} 64}{log_{0,7} 22 - log_{0,7} 44}$
4. $log_2\left(log_3 \sqrt[16]{3}\right)$

Решение:

Чтобы выполнить это задание нам понадобятся следующие определения и свойства:

1. $a^{\log_a b} = b$;
2. $\log_a b + \log_a c = \log_a (bc)$;   3 $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$;

4 $\sqrt[13]{a} = a^{\frac{1}{13}}$.

3. $\left(2^{\log_2 15} + 3\right)^{\log_{18} 28} : \log_2 128 = (15+3)^{\log_{18} 28} : \log_2 128 = 18^{\log_{18} 28} : \log_2 128 = 28 : \log_2 128 = 28 : \log_2 2^7 = 28 : 7 = 4$.
4. $\left(\log_{37} 5 + \log_{37} 7{,}4 - 4^{\log_2 5}\right) : \log_{\frac{1}{3}} 81 =$

$= \left(\log_{37}(5 \cdot 7{,}4) - 4^{\log_2 5}\right) : \log_{\frac{1}{3}} 81 =$

$= \left(\log_{37} 37 - 2^{2\log_2 5}\right) : \log_{\frac{1}{3}} 3^4 =$

$= \left(1 - \left(2^{\log_2 5}\right)^2\right) : \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} = (1 - 5^2) : (-4) = -24 : (-4) = 6$.

1. $\dfrac{\log_{0,7} 64}{\log_{0,7} 22 - \log_{0,7} 44} = \dfrac{\log_{0,7} 2^6}{\log_{0,7}\left(\frac{22}{44}\right)} = \dfrac{6\log_{0,7} 2}{\log_{0,7}\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{6\log_{0,7} 2}{\log_{0,7}(2)^{-1}} = \dfrac{6\log_{0,7} 2}{-1 \cdot \log_{0,7} 2} = -6.$
2. $\log_2\left(\log_3 \sqrt[16]{3}\right) = \log_2\left(\log_3 3^{\frac{1}{16}}\right) = \log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4.$

**6. Самостоятельная работа на оценку (по выбору учащегося).**

<u>Задание: решите уравнение:</u>

*На отметку «3»:*

1. $\log_3 (2x - 1) = 2$; Ответ: 5
2. $\log_2 (x + 3) = \log_2 16$. Ответ: 13

*На отметку «4»:*

1. $\log_{\frac{1}{2}}^{2} x - \log_{\frac{1}{2}} x = 6$; Ответ: $\frac{1}{8}$, 4
2. $\log_9 x + 2\log_3 x = 5$. Ответ: 9

*На отметку «5»:*

$\lg(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x-3) - \lg 25$ Ответ: 14,6.

**1.** ***Решение простейших уравнений:***

Простейшими логарифмическими уравнениями будем называть уравнения следующих видов:

$\log_a x = b,\ a > 0,\ a \neq 1.$
$\log_a f(x) = b,\ a > 0,\ a \neq 1.$
$\log_{f(x)} b = c,\ b > 0.$

Эти уравнения решаются на основании определения логарифма:

если $\log_b a = c$, то $a = b^c$.

Решить уравнение

$$\log_2 x = 3.$$

Решение. Область определения уравнения $x > 0$. По определению логарифма $x = 2^3$, $x = 8$ принадлежит области определения уравнения.

Ответ: $x = 8$.

$\log_3(5x - 1) = 2$.

**Решение:**

ОДЗ: $5x - 1 > 0$; $x > 1/5$.

$\log_3(5x - 1) = 2$,

$\log_3(5x - 1) = \log_3 3^2$,

$5x - 1 = 9$,

$x = 2$.

**Ответ:** 2.

**Пример. Решить уравнение**

$$\log_{\frac{1}{9}}(2x^2 - 2x - 1) = -\frac{1}{2}.$$

Решение. Область определения уравнения находится из неравенства $2x^2 - 2x - 1 > 0$. Воспользуемся определением логарифма:

$$2x^2 - 2x - 1 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Применим правила действий со степенями, получим $2x^2 - 2x - 1 = 3$. Это уравнение имеет два корня $x = -1$; $x = 2$. Оба полученные значения неизвестной удовлетворяют неравенству $2x^2 - 2x - 1 > 0$, т.е. принадлежат области определения данного уравнения, и, значит, являются его корнями.

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = 2$.

*Пример*. Решить уравнение

$$\log_{x-1} 9 = 2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 1 > 0,\ x - 1 \neq 1, \\ (x-1)^2 = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,\ x \neq 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ. $x = 4$.

Если уравнение содержит логарифмы по одному основанию, то для приведения их к виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ используются следующие свойства логарифмов:

- $\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$, где $a > 0$; $c > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$,
- $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$, где $a > 0$; $c > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$,
- $m \log_b a = \log_b a^m$, где $a > 0$; $b > 0$, $b \neq 1$; $m \in R$.

*Пример* 1. Решить уравнение

$$\log_6 (x - 1) = 2 - \log_6 (5x + 3).$$

Решение. Найдём область определения уравнения из системы неравенств

$$\begin{cases} x - 1 > 0; \\ 5x + 3 > 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1; \\ x > -0{,}6. \end{cases} \quad x > 1.$$

Применяя преобразования, приходим к уравнению

$$\log_6 (x - 1) + \log_6 (5x + 3) = 2,$$

$\log_6((x-1)(5x+3)) = 2$, далее, потенцированием, к уравнению
$(x-1)(5x+3) = 36$, имеющему два корня $x = -2{,}6$; $x = 3$. Учитывая область определения уравнения, $x = 3$.
Ответ. $x = 3$.

*Пример* 2. Решить уравнение

$$\log_5\left((3x-1)(x+3)\right) - \log_5 \frac{3x-1}{x+3} = 0.$$

Решение. Найдём область определения уравнения, решив неравенство $(3x-1)(x+3) > 0$ методом интервалов.

$$x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$

Учитывая, что разность логарифмов равна логарифму частного, получим уравнение $\log_5(x+3)^2 = 0$. По определению логарифма
$(x+3)^2 = 1$, $x = -4$, $x = -2$. Число $x = -2$ посторонний корень.
Ответ. $x = -4$.

*Пример* 3. Решить уравнение

$$\log_2(6-x) = 2\log_6 x.$$

Решение. На области определения $0 < x < 6$ исходное уравнение равносильно уравнению $6 - x = x^2$, откуда $x = -3$, $x = 2$. Число $x = -3$ посторонний корень.
Ответ. $x = 2$.

*Уравнения вида*

$$A\log_a f(x) + B\log_b g(x) + C = 0.$$

Метод потенцирования применяется в том случае, если все логарифмы, входящие в уравнение, имеют одинаковое основание. Для приведения логарифмов к общему основанию используются формулы:

1. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, где $a > 0,\ a \neq 1;\ b > 0;\ c > 0,\ c \neq 1.$

2. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, где $a > 0,\ a \neq 1;\ b > 0,\ b \neq 1.$

3. $\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b$, где $a > 0,\ a \neq 1;\ b > 0;\ n \in R,\ n \neq 0.$

4. $\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b$, где $a > 0,\ a \neq 1;\ b > 0;\ m, n \in R,\ n \neq 0.$

*Пример* 1. Решить уравнение

$$\log_2(2-x) + \log_{0,5}(x-1) = 3.$$

Решение. Область определения уравнения $1 < x < 2$. Используя формулу (3), получим

$$\log_2(2-x) - \log_2(x-1) = 3.$$

Так как $3 = \log_2 8$, то на области определения получим равносильное уравнение $(2-x)/(x-1) = 8$, откуда $x = 10/9$.
Ответ. $x = 10/9$.

*Пример* 2. Решить уравнение

$$\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{25}.$$

Решение. Область определения уравнения $x > 1$. Приведём логарифмы к основанию 3, используя формулу (4).

$$\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_{3^{-1}} 5^{-2}, \quad \log_3(x-1) = \log_3 5.$$

Ответ. $x = 6$.

*Пример* 3. Решить уравнение

$$\log_3(x+1) + \log_{x+1} 3 = 2.$$

Решение. Область определения уравнения $x > -1$, $x \neq 0$. Приведём логарифмы к основанию 3, используя формулу (2).

$$\log_3(x+1) + \frac{1}{\log_3(x+1)} = 2.$$

Умножим обе части уравнения на $\log_3(x+1) \neq 0$ и перенесем все слагаемые в левую часть уравнения. Получим $(\log_3(x+1)-1)^2 = 0$, откуда $\log_3(x+1) = 1$ и $x = 2$.

Ответ. $x = 2$.

**Домашнее задание:**

$$\log_5 x + \log_5 \frac{1}{x+2} = \log_5 2 - 2\log_5 \sqrt{x-1}$$

$$\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$$

$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0$$

$$x^{\frac{1}{4}(\lg x+7)} = 10^{\lg x+1}$$

$$\log_2(x+2)^2 + \log_2(x+10)^2 = 4\log_2 3$$

$$\log_{1/3}(x^2 + 5x + 9) = -1$$

$$\log_{x+1}(x^2 - 3x + 11) = -1$$