ЭМ 1.,1, математика,

Задание на 6.04.20г. Тема :Применение производной. Уравнение касательной к графику.

Эл. Уч-к Колмогоров А В. Стр.126-130, выполнить №257-260.

Методические рекомендации для знакомства с темой, читать

Уравнение касательной к графику функции

Лекция: Уравнение касательной к графику функции

Если некоторая прямая проходит через точку с координатами (x_0; f (x_0)), а угол наклона данной прямой равен производной функции в данной токе, то такую прямую называют касательной к графику.

Обратите внимание, если не существует производной графика в данной точке, то и не может существовать касательной, или же данная касательная перпендикулярна к оси ОХ. Второй случай можно наблюдать в результате проведения касательной для графика функции арксинуса.

Итак, давайте рассмотрим задание касательной. Мы знаем, что для задания любой прямой, необходимо воспользоваться формулой y = kx + b.

Коэффициент k показывает, под каким углом будет располагаться прямая относительно оси ОХ. Если данный коэффициент больше нуля, то угол наклона между касательной и осью ОХ острый, если же коэффициент отрицательный, то угол между осью ОХ и касательной тупой.

Но давайте возвратимся к тому, что такое угловой коэффициент и как он находится. С прошлых вопросов мы помним, что угловой коэффициент – это производная функции в некоторой точке x_0.

Чтобы задать уравнение касательной, необ

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

ходимо воспользоваться формулой:

Итак, давайте рассмотрим подробнее, для этого необходимо провести аналогию между первоначальным уравнением прямой и уравнением касательной.

Отсюда следует, что для нахождения коэффициента k, необходимо найти производную в рассматриваемой точке.

Давайте найдем уравнение прямой для функции $y = x^3$ в точке $x_0 = 3$.
1. Находим производную данной функции:
$y' = 3x^2$.

2. Как уже было сказано ранее, коэффициент – это производная функции в некоторой точке, поэтому
$y'(3) = 3 * 3^2 = 27$.

3. Как видно из уравнения касательной, нам так же необходимо найти и значение функции в рассматриваемой точке $f(x_0)$:

$f(3) = 3^3 = 27$.

Совершенно случайно получилось так, что значение производной в точке совпало со значением функции в заданной точке. Обратите внимание, что это просто совпадения и НЕ обязательно $y' = f(x_0)$.

4. Теперь давайте составим уравнение касательной по заданной формуле:
$y = 27 * (x – 3) + 27$.

Чтобы получить конечно уравнение, необходимо сделать некоторые преобразования:
$y = 27 * (x – 3) + 27 = 27x – 81 + 27 = 27x - 54$.

То есть уравнение касательной:
$y = 27x - 54$.

Найти уравнение касательной достаточно просто, главное не запутаться в формуле. Для этого её необходимо просто выучить.

ЭМ.1.1 математика

8.04.20г. Тема: Производная при исследовании функции

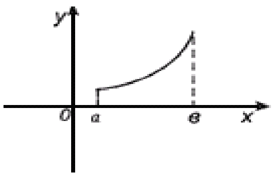
Эл. Уч-к Колмогоров стр 115-121 выполнить №283-286

Методические рекомендации для знакомства с темой

Применение производной к исследованию функций

[Перейти к списку задач и тестов по теме "Применение производной к исследованию функций"]

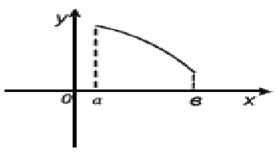
Достаточное условие возрастания функции



$f'(x) > 0$

Если в каждой точке интервала (a, b) $f'(x)>0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции.



$f'(x) < 0$

Если в каждой точке интервала (a, b) $f'(x)<0$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Определение:

x_0 называется критической точкой функции $f(x)$, если

1) x_0 – внутренняя точка области определения $f(x)$;

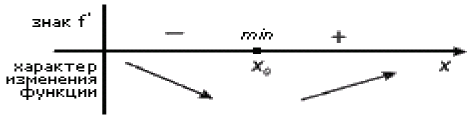
2) $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

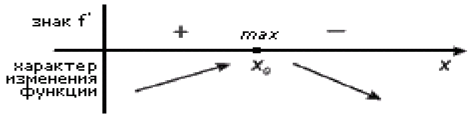
Необходимое условие экстремума:

Если x_0– точка экстремума функции f(x), то эта точка является критической точкой данной функции.

Достаточное условие экстремума:

Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции f(x).





Примеры экстремумов:

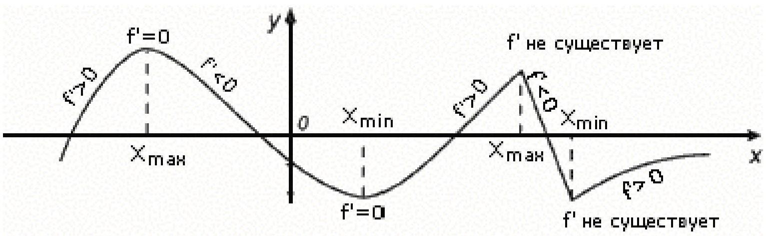


Схема исследования функции.

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.
5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b].

1. Найти значения функции в концах отрезка, т.е. f(a) и f(b) ;
2. Найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (a,b) ;
3. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.Задачи и тесты по теме "Применение производной к исследованию функций"

Рекомендации к теме

Проработав данную тему, Вы должны научиться применять производную для исследования функций на монотонность и экстремумы, для нахождения наибольших и наименьших значений функций. Рассмотрим решение подобных задач на следующих примерах. Обратите внимание, что решение всегда начинается с нахождения области определения исследуемой функции.

Примеры.

1. Найти промежутки убывания и возрастания функции

$y = \ln x + \frac{1}{x}$.

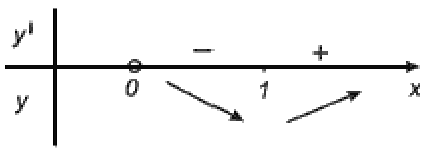
Решение:

1) $D(y) = (0;+\infty)$
2) Найдем производную

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$
$$D(y') = (0;+\infty)$$

3) Найдем критические точки функции:

$$y' = 0;$$
$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0;$$
$$x = 1$$

4) 

(для определения знаков производной использовали метод интервалов)

Ответ: при $x \in (0;1]$ функция убывает, при $x \in [0;+\infty)$ функция возрастает.

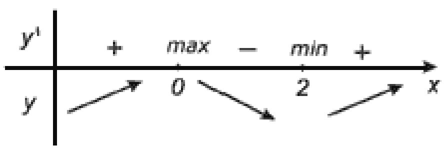
2. Исследовать функцию $f(x)=x^3-3x^2+4$ с помощью производной и построить ее график.

Решение:

1) $D(f) = R$

2) $f'(x) = 3x^2 - 6x$,
$D(f') = R$

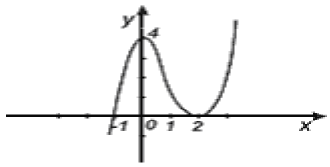
3) $f'(x) = 0;$
$3x^2 - 6x = 0,$
$x^2 - 2x = 0$
$x = 0, x = 2$ - критические точки

4) 

x=0 – точка максимума, x=2 – точка минимума.

5) f(0)=4; f(2)=0

Используя результаты исследования, строим график функции : $f(x)=x^3-3x^2+4$



3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};2\right]$

Решение:

$$D(f): x \in R, x \neq 0.$$

1) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6\frac{1}{8};$

$f(2) = 9\frac{1}{2}$

2) $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2} = \frac{3x^4 - 3}{x^2};$

$\frac{3x^4 - 3}{x^2} = 0,$

$3x^4 - 3 = 0$

$x_1 = 1; x_2 = -1$

$1 \in \left(\frac{1}{2};2\right);$

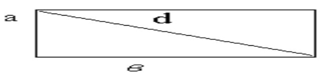
$-1 \notin \left(\frac{1}{2};2\right)$

$f(1) = 4$

3) Из чисел $6\frac{1}{8};\ 9\frac{1}{2}$ и 4 наибольшее $9\frac{1}{2}$, наименьшее 4.

Ответ: $\max\limits_{[\frac{1}{2};2]} f(x) = 9\frac{1}{2};\quad \min\limits_{[\frac{1}{2};2]} f(x) = 4;$

4.Найти длины сторон прямоугольника с периметром 20см, имеющего наименьшую диагональ.



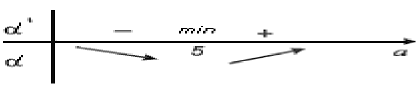
Решение:

Пусть a и в длины сторон прямоугольника, d - его диагональ. Тогда a+b=10. По теореме Пифагора $d^2=a^2+b^2$. По условию задачи a>0,b>0. b=10-a>0, значит 0 < a < 10. $d^2=a^2+(10-a)^2=2a^2-20a+100$, 0< a < 10.

Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения a, при котором функция $d(a)=2a^2-20a+100$ принимает наименьшее значение на интервале 0 < a <10.

Найдем производную d'(a)=4a-20.

Критическая точка $a = 5 \in (0;10)$.



a=5 точка минимума. Следовательно, наименьшее значение функция d(a) на интервале (0;10) принимает в точке a=5. При этом b=5. **Ответ:** 5см, 5см.