Метод замены переменной

Краткие теоретические сведения

При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона-Лейбница предпочтительно жестко не разграничивать этапы решения задачи (нахождение первообразной подынтегральной функции, нахождение приращения первообразной). Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

ТЕОРЕМА. Пусть функция φ(t) имеет непрерывную производную на отрезке [α,β], a=φ(α), в=φ(β) и функция f(x) непрерывна в каждой точке x вида x=φ(t), где t∈[α,β].

Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Эта формула носит название формулы замены переменной в определенном интеграле.

Подобно тому, как это было в случае неопределенного интеграла, использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному (табличным). При этом в отличие от неопределенного интеграла в данном случае нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования. Достаточно лишь найти пределы интегрирования α и β по новой переменной t как решение относительно переменной t уравнений φ(t)=a и φ(t)=в. На практике, выполняя замену переменной, часто начинают с того, что указывают выражение t=ψ(x) новой переменной через старую. В этом случае нахождение пределов интегрирования по переменной t упрощается: α=ψ(a), β=ψ(в).

Пример 1.

Вычислите определенный интеграл $\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3 \cdot xdx$.

Решение.

$$\int_{-1}^{2}(x^2-1)^3 xdx=\left[\begin{array}{l} x^2-1=t \\ 2xdx=dt \\ xdx=\frac{1}{2}dt \\ t_н=(-1)^2-1=0 \\ t_в=2^2-1=3 \end{array}\right]=\int_0^3 t^3\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_0^3 t^3dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}\Big|_0^3=\frac{3^4}{8}-\frac{0^4}{8}=\frac{81-0}{8}=\frac{81}{8}=10{,}125$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 x\cdot(2-x^2)^5dx$

Положим $t=2-x^2$. Тогда $dt=d(2-x^2)=(2-x^2)'dx=-2xdx$ и $xdx=-\frac{1}{2}dt$. Если $x=0$, то $t=2-0^2=2$, и если $x=1$, то $t=2-1^2=1$. Следовательно:

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5dx=\int_2^1 t^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int_2^1 t^5dt=-\frac{1}{2}\left(\frac{t^6}{6}\Big|_2^1\right)=$$

$$=-\frac{1}{12}\cdot\left(t^6\Big|_2^1\right)=-\frac{1}{12}\cdot\left(1-2^6\right)=\frac{21}{4}$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$

Воспользуемся заменой переменной $t=\sqrt{1+3x}$. Тогда $x=\frac{t^2-1}{3}$ и $dx=\frac{2}{3}tdt$. Если $x=0$, то $t=1$ и, если $x=5$, то $t=4$. Выполняя замену, получим:

$$\int_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_1^4-t\Big|_1^4\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right)=4$$

Пример 4. Вычислить $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

Положим $t=e^x$. Тогда $x=\ln t$, $dx=dt/t$ и, если $x=\ln 2$, то $t=2$, если $x=\ln 3$, то $t=3$. Выполняя замену, получаем:

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3\frac{dt}{t(t-t^{-1})}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

Индивидуальные задания

Вычислить определенный интеграл методом замены переменной

1. $\int_0^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$	11. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	21. $\int_1^2\frac{e^{1/x}}{x^2}dx$
2. $\int_0^{1/2}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $\int_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$	22. $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
3. $\int_1^e\frac{\ln^2 x}{x}dx$	13. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$	23. $\int_0^1\frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$

4. $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ 14. $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$ 24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$