Задание для студентов гр. ИС 1 на период с 06.05.2020 – 15.05.2020 (8 пар – 16 часов)

Дисциплина «Математика»
Преподаватель Токарская М.С.
Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru
Тел. 89147174421 – WhatsApp – если есть вопросы.

Все задания отправлять на почту!!!!!

Уважаемые студенты!
Прошу вас отнестись со всей серьезностью к новой теме!
Не игнорируете ссылки, которые вам будут даны!!!
Внимательно и вдумчиво прочтите лекцию!!! И только после этого приступайте к написанию конспекта!!!

Учебники:

1. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf

- учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. **Гл.2 §4 п.12-13, 15**

2. https://ru.calameo.com/read/0007452692fa11c1f518e - Башмаков М.И., Математика (Начальное и среднее профессиональное образование) – **Гл.9, занятия 1-5**

3. http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html - Понятие производной, Александр Емелин, 2010-2020.

Задание: составить конспекты уроков и выполнить все примеры в конспектах. Выполнить самостоятельную работу.

Тема 1: Производная степенной функции

Сегодня на уроке мы будем вычислять производные степенной функции. С этой производной мы уже сталкивались ранее и при вычислении пользовались рядом формул для преобразования выражений:

1. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
2. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.
3. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Для вычисления непосредственно производной функции, мы будем использовать следующие формулы:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
3. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
4. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Если какие – то из представленных формул вычисления производных отсутствуют в вашей таблице – запишите их.

Дальнейшая работа будет проходить по учебнику ***Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика в задачах с решениями, учебное пособие.***

280. $y = \frac{3}{5x^2}$.

Решение. Преобразуем данную функцию к виду $y = \frac{3}{5x^2} = \frac{3}{5}x^{-2}$. Тогда получим

$$y' = \left(\frac{3}{5}x^{-2}\right)' = \frac{3}{5}(x^{-2})' = \frac{3}{5}(-2)x^{-3} = -\frac{6}{5}x^{-3} = -\frac{6}{5x^3}.$$

281. $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 3x^2 + x - 3$. **282.** $y = \frac{3}{8x^4}$.

283. $y = \frac{1}{3}x^6 + \frac{7}{10x^5} - \frac{1}{6}x^3$. **284.** $y = \frac{x^3}{6} + \frac{6}{x^3}$.

285. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$.

Решение. Так как $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$, то

$$f'(x) = (x^{3/4})' = \frac{3}{4}x^{3/4-1} = \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$$

286. $y = \frac{2}{3x\sqrt{x}}$.

Решение. Здесь $y = \frac{2}{3x\sqrt{x}} = \frac{2}{3}x^{-3/2}$, откуда

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-5/2} = -x^{-5/2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

287. $y = x^2 + \frac{2}{x^4} - \sqrt[3]{x}$.

Решение. Имеем $y = x^2 + 2x^{-4} - x^{1/3}$. Следовательно,

$$y' = (x^2 + 2x^{-4} - x^{1/3})' = (x^2)' + (2x^{-4})' - (x^{1/3})' = 2x - 8x^{-5} - \frac{1}{3}x^{-2/3} =$$
$$= 2x - \frac{8}{x^5} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

289. $y = \sqrt{x}(x^2 + 2x - 5)$.

Р е ш е н и е. Здесь следует воспользоваться правилом дифференцирования произведения и формулой X. Имеем

$$y' = (\sqrt{x})'(x^2+2x-5)+(x^2+2x-5)'\sqrt{x}.$$

Так как $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x^2+2x-5)' = 2x+2$, то

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2x-5)+(2x+2)\sqrt{x} = \frac{x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+$$

$$+2\sqrt{x} = \frac{1}{2}x\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x} = 2{,}5x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

290. $y = \sqrt[5]{x^3}$. **291.** $f(x) = 2x\sqrt[3]{x^2}$.

292. $u(t) = t^3 - \frac{1}{t^2} + t\sqrt[3]{t}$. **293.** $y = \frac{x^2-3x}{2x+1}$.

297. $f(x) = x^2(\sqrt{x}+x-1)$.

299. $s(t) = t(\sqrt{t}-5)$.

Тема 2. Обучающая самостоятельная работа по теме "Вычисление производных функций"

При вычислении производных функций пользуются таблицей производных элементарных функций и правилами вычисления производных.

Примеры:

1. $y=\frac{1}{x}+4x.$

$$y'=\left(\frac{1}{x}+4x\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'+(4x)'=-\frac{1}{x^2}+4=4-\frac{1}{x^2}.$$

2. $y=-2x^2-\frac{1}{x}.$

$$y'=\left(-2x^2\right)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=-2\cdot 2x-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}-4x.$$

3. $y=cosx*(x^2-3x)$

$$\boldsymbol{y}'=(\cos x)'(x^2-3x)+\cos x(x^2-3x)'=-\sin x\,(x^2-3x)+cosx(2x-3)$$

4. $y=\frac{x^3-5x+3}{x^4-5x}$

$$\boldsymbol{y}'=\frac{(x^3-5x+3)'(x^4-5x)-(x^3-5x+3)(x^4-5x)'}{(x^4-5x)^2}=$$

$$=\frac{(3x^2-5)(x^4-5x)-(x^3-5x+3)(4x^3)}{(x^4-5x)^2}$$

5. $y=\sqrt{x^2+2x}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}*(x^2+2x)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}*(2x+2)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x}}*2(x+1)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Используя таблицу и правила вычисления производных, а так же используя образцы решения, представленные выше, вычислить следующие производные:

Блок 1.	**Блок 2**	**Блок 3.**	**Блок 4.**
$f(x)=x$	$y=\frac{x+1}{x-1}$	$y=7\cos x-5\sin x-9$	$y=(2x^3-3)(2x^3-1)$
$f(x)=3x-3$	$y=\frac{3x-1}{2x+9}$	$y=5\cos 2x$	$y=e^x(x^2+6x+6)$
$f(x)=4x^2$	$y=\frac{(x-1)^2}{2x+1}$	$y=\sin x\cos x$	$y=(3tg\,x-2)(x^2+1)$
$f(x)=-2x^3+4$	$y=\frac{x^3+5x^2}{3x-1}$	$y=\frac{\sin x}{\cos x}$	$y=\left(\sqrt{x}+2\right)(x^2-1)$
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+5$	$y=\frac{3x^2-2x-1}{2x-1}$	$y=2tgx-ctgx$	$y=\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)(x^2+1)$
$f(x)=4x^2-2x$	$y=\frac{2x+5}{x(x+1)}$	$y=2x-\sin 3x$	
		$y=\sin x(1+\cos x)$	
		$y=\frac{3-\cos x}{3+\cos x}$	
		$y=\frac{3-2tgx}{tgx}$	

Для получения отметки:

"3" - необходимо решить все примеры Блока 1 и не менее трех примеров Блока 2 и 3;

"4" - необходимо решить все примеры Блока 1 и не менее четырех примеров оставшихся блоков.

"5" - необходимо решить все примеры Блока 1 и не менее пяти примеров оставшихся блоков.

Тема 3. Производная сложной функции.

Сложной называют функцию, которая составлена из нескольких других функция, т.е сложная функция использует в качестве аргумента другую функцию.

Простая функция	Сложная функция
$y = \sin x$	$y = \sin(3x - 2)$
$y = \sqrt{x} + 3x^2$ (к функции корень из x прибавили $3x^2$)	$y = \sqrt{x + 3x^2}$ корень вычисляется из всей суммы
$y = (2x^2 + 3) \cdot lnx$ – функция представляет собой произведение двух простых функций	$y = \ln(2x^2 + 3)$ – функция вычисляет натуральный логарифм из суммы

Как мы видим основное отличие простых функций (даже если они являются суммой, разностью, произведением или частным нескольких функций) от сложных заключается в том, что в последнем случае все действия выполняются только над одной переменной, а в первом – у каждой функции своя переменная.

Таким образом для работы со сложной функцией мы будем использовать промежуточные функции:

1. $y = \sin(3x - 2)$ – промежуточная функция $u = 3x - 2$, и теперь $y = \sin u$. А производную функции синуса мы умеем вычислять
2. $y = \sqrt{x + 3x^2}$ – промежуточная функция $u = x + 3x^2$, и теперь наша функция имеет вид $y = \sqrt{u}$
3. $y = \ln(2x^2 + 3)$ – промежуточная функция $u = 2x^2 + 3$, и теперь наша функция имеет вид $y = \ln u$

Теорема: Если функция $\boldsymbol{f(u)}$ – дифференцируема по $\boldsymbol{u}$, а функция ***u(x)*** - дифференцируема по переменной x, то **производная сложной функции $\boldsymbol{f(u(x))}$ вычисляется по формуле $\boldsymbol{f'(u(x)) = u'(x) \cdot f'(u)}$**

При дифференцировании сложных функций удобно вводить коэффициент сложности этой функции. Он определяется количеством входящих промежуточных функций. Например, у функции $y = \sin(3x - 2)$ коэффициент сложности – 2, т.к. эту функцию можно разбить на две промежуточные. А у функции $y = sin^2(5 - x)$ коэффициент равен 3: $u = 5 - x, v = \sin u,\ y = v^2$

Очень важно правильно определить порядок следования промежуточных функций. Например, для функции $y = \ln \mathrm{tg}^2 3x$ (4), имеющей коэффициент сложности 4, промежуточные функции расположены в следующем порядке: 1) логарифмическая $\ln(\mathrm{tg}^2 3x)$; 2) степенная $(\mathrm{tg}\,3x)^2$; 3) тригонометрическая $\mathrm{tg}(3x)$; 4) линейная $3x$.

238. Продифференцировать функцию $y=(x^2+3x)^5$.

Решение. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Составляющими функции являются $y=u^5$, $u=x^2+3x$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, находим

$$y'_x=y'_u u'_x=5(x^2+3x)^4(2x+3).$$

239. Учитывая, что $(\sin t)'=\cos t$, продифференцировать функцию $y=\sin 2x$.

Решение. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Порядок следования промежуточных функций таков: $y=\sin u$, $u=2x$. Находим

$$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x.$$

240. Найти y', если $y=\sin^2 4x$.

Решение. Имеем $y=\sin^2 4x$ ③ . Порядок следования функций: $y=u^2$; $u=\sin v$; $v=4x$. Значит,

$$y'=2\sin 4x(\sin 4x)'=2\sin 4x\cos 4x\cdot(4x)'=2\sin 4x\cos 4x\cdot 4=4\sin 8x$$

(в окончательной записи использована формула синуса двойного угла).

249. $y=\ln x^2$.

Решение. $y'=\dfrac{1}{x^2}\cdot(x^2)'=\dfrac{1}{x^2}\cdot 2x=\dfrac{2}{x}$.

250. $y=\ln(x^3-1)$.

Решение. $y'=\dfrac{1}{x^3-1}(x^3-1)'=\dfrac{1}{x^3-1}\cdot 3x^2=\dfrac{3x^2}{x^3-1}$.

254. $f(x)=\ln^3(x^2-1)$.

Решение. Имеем $f(x)=\ln^3(x^2-1)$. Порядок следования промежуточных функций таков: $f(x)=u^3$; $u=\ln v$; $v=x^2-1$. Следовательно,

$$f'(x)=3\ln^2(x^2-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\frac{6x}{x^2-1}\ln^2(x^2-1).$$

Тема 4. Производная показательной функции.

Напоминаю, что показательной функцией называется функция вида $y = a^x, a > 0, a \neq 1, x -$ любое число.

Частным случаем показательной функции является функция экспоненты, т.е. $y = e^x$, где $e \approx 2{,}7$

При вычислении производной воспользуемся следующими формулами:

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad \text{где } \ln a - \text{натуральный логарифм числа } a$$

$$(e^x)' = e^x \cdot \ln e = e^x, \text{т.к. } \ln e = 1$$

Если показательная функция является сложной, т.е. $y = a^{u(x)}$ – показатель степени представляет собой некую функцию***, то ее производная вычисляется как произведение производной показательной функции на производную от показателя степени:*** $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$

Вычислим производные функций:

Пример 1. $(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$

Пример 2. $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$

Пример 3. $(3^{2x})' = 3^{2x} \cdot \ln 3 \cdot (2x)' = 2 \cdot 3^{2x} \cdot \ln 3$ - в этом примере нам представлена сложная показательная функция. Поэтому мы воспользовались формулой: $\left(a^{u(x)}\right)' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$

Пример 4. $(5^{\cos x})' = 5^{\cos x} \cdot \ln 5 \cdot (\cos x)' = -5^{\cos x} \cdot \ln 5 \cdot \sin x$

306—311. Найти производные следующих функций:

306. $y = 3^x$. **307.** $f(x) = x^3 + 2^x$.

308. $f(x) = 3^{\sin x} - 2^{2x} + x^2$. **309.** $y = 2^{\sin 5x}$.