ИС 1.1   математика

6.04.20г.

тема: Вычисление производных различных функций

Колмогоров эл. Уч-к   выполнить №231-235

Методические рекомендации для ознакомления с темой

Пример 1:

Вычислить производную функции $y = 5x^2 + 3x + 4$
Решение:

$$y' = \left(5x^2 + 3x + 4\right)' =$$

[Используем третье правило дифференцирования $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$]

$$= \left(5x^2\right)' + \left(3x\right)' + 4' =$$

[Для первого и второго слагаемого следуем применить четвертое правило дифференцирования $\left(const \cdot f\left(x\right)\right)' = const \cdot f'\left(x\right)$]

[для третьего слагаемого используем правило $const' = 0$, для первого и второго -табличную производную $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$]

$$= 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot 1 \cdot x^{1-0} + 0 = 10 \cdot x + 3$$

Пример 2:

Вычислить производную функции $y = 3x^{\frac{13}{7}} - 4x\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}$
Решение:

$$y' = \left(3x^{\frac{13}{7}} - 4x\sqrt{x} + \frac{7}{x^3}\right)' = \left(3x^{\frac{13}{7}} - 4x^{1,5} + 7x^{-3}\right)' =$$

[Используем третье правило дифференцирования $\left(u \pm v\right)' = u' \pm v'$]

$$= \left(3x^{\frac{13}{7}}\right)' - \left(4x^{1,5}\right)' + \left(7x^{-3}\right)' =$$

[Применим четвертое правило дифференцирования $\left(const \cdot f\left(x\right)\right)' = const \cdot f'\left(x\right)$]

$$= 3\left(x^{\frac{13}{7}}\right)' - 4\left(x^{1,5}\right)' + 7\left(x^{-3}\right)' =$$

[Применим табличную производную $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$]

$$= 3\cdot\frac{13}{7}x^{\frac{13}{7}-1} - 4\cdot 1,5x^{1,5-1} + 7\cdot x^{-3-1} = 3\cdot\frac{13}{7}x^{\frac{6}{7}} - 4\cdot 1,5x^{0,5} + 7\cdot x^{-4} =$$

$$= \frac{39}{7}x^{\frac{6}{7}} - 6\sqrt{x} + \frac{7}{x^4}$$

Пример 3:

Вычислить производную функции $y = x^2\sin(x)$

Решение:

$$y' = \left(x^2\sin(x)\right)' =$$

[Используем формулу дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$]

$$= x^2\left(\sin(x)\right)' + \left(x^2\right)'\sin(x) =$$

[Применим табличные производные $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ и $\sin'(x) = \cos(x)$]

$$= x^2\cos(x) + 2x\sin(x)$$

Пример 4:

Вычислить производную функции $y = \dfrac{e^{x+14}}{x^2+2x}$

Решение:

$$y' = \left(\frac{e^{x+14}}{x^2+2x}\right)' =$$

[Используем формулу дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$]

$$= \frac{\left(e^{x+14}\right)'\left(x^2+2x\right)-\left(e^{x+14}\right)\left(x^2+2x\right)'}{\left(x^2+2x\right)^2} =$$

[Все бы хорошо и по табличным производным. Кроме e^{x+14}. Вспомним свойства степеней $e^{x+14} = e^x e^{14}$ и вынесем константу за знак дифференциала.]

$$= \frac{\left(e^x e^{14}\right)'\left(x^2+2x\right)-e^{x+14}\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{e^{14}\left(e^x\right)'\left(x^2+2x\right)-e^{x+14}\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{14}e^x\left(x^2+2x\right)-e^{x+14}\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{e^{x+14}\left(x^2+2x\right)-e^{x+14}\left(2x+2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2} =$$

$$= \frac{e^{x+14}\left(x^2+2x-2x-2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2} = \frac{e^{x+14}\left(x^2-2\right)}{\left(x^2+2x\right)^2}$$

Производная сложной функции.

Формула: $f'\left(g\left(x\right)\right) = f'\left(g\right)\cdot g'\left(x\right)$

Её все равно никто не понимает, формулу эту, поэтому примеры:

Пример 5:

Вычислить производную функции $y = \sin\left(x^2\right)$

Решение:

$$\sin'\left(x^2\right) = \cos\left(x^2\right)\cdot\left(x^2\right)' = 2x\cdot\cos\left(x\right)$$

Пояснение: требуется вычислить производную функции синус от какого–то аргумента.

Производная синуса равна косинусу. От того же аргумента (в данном случае это x^2). И умножим на производную аргумента.

Можно даже сформулировать некое правило вычисления производной сложной функции «Идти от наружной функции к внутренней».

Пример 6.

Вычислить производную функции $y = \sqrt{x^2+\cos\left(x\right)}$

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{x^2+\cos\left(x\right)}\right)' =$$

[Наружная функция это корень квадратный, помним, что $\left(\sqrt{t}\right)' = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.

Применим это, не забыв умножить на производную функции, стоящей внутри корня.]

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+\cos\left(x\right)}}\left(x^2+\cos\left(x\right)\right)' = \frac{2x-\sin\left(x\right)}{2\sqrt{x^2+\cos\left(x\right)}}$$

ИС 1.1 математика

8.04.20г.

тема: Производные различных уровней сложности

Выполнить № 236- 240 . Уч-ку Колмогорову

Методические рекомендации для ознакомления с темой

Производная сложной функции.

Все примеры этого раздела опираются на таблицу производных и теорему о производной сложной функции, формулировка которой такова:

Пусть 1) функция u=φ(x) имеет в некоторой точке x0 производную u′x=φ′(x0), 2) функция y=f(u) имеет в соответствующей точке u0=φ(x0) производную y′u=f′(u). Тогда сложная функция y=f(φ(x)) в упомянутой точке также будет иметь производную, равную произведению производных функций f(u) и φ(x):

(f(φ(x)))′=f′u(φ(x0))·φ′(x0)

или, в более короткой записи: y′x=y′u·u′x.

В примерах этого раздела все функции имеют вид y=f(x) (т.е. рассматриваем лишь функции одной переменной x). Соответственно, во всех примерах производная y′ берётся по переменной x. Чтобы подчеркнуть то, что производная берётся по переменной x, часто вместо y′ пишут y′x.

В примерах №1, №2 и №3 изложен подробный процесс нахождения производной сложных функций. Пример №4 предназначен для более полного понимания таблицы производных и с ним имеет смысл ознакомиться.

Желательно после изучения материала в примерах №1-3 перейти к самостоятельному решению примеров №5, №6 и №7. Примеры №5, №6 и №7 содержат краткое решение, чтобы читатель мог проверить правильность своего результата.

Пример №1

Найти производную функции y=ecosx.

Решение

Нам нужно найти производную сложной функции y′. Так как y=ecosx, то y′=(ecosx)′. Чтобы найти производную (ecosx)′ используем формулу №6 из таблицы производных. Дабы использовать формулу №6 нужно учесть, что в нашем случае u=cosx. Дальнейшее решение состоит в банальной подстановке в формулу №6 выражения cosx вместо u:

$$\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'$$

$$\left(e^{\cos x}\right)' = e^{\cos x}\cdot(\cos x)'$$

Итак,

y′=(ecosx)′=ecosx·(cosx)′(1.1)

Теперь нужно найти значение выражения (cosx)′. Вновь обращаемся к таблице производных, выбирая из неё формулу №10. Подставляя u=x в формулу №10, имеем: (cosx)′=−sinx⋅x′. Теперь продолжим равенство (1.1), дополнив его найденным результатом:

y′=(ecosx)′=ecosx⋅(cosx)′=ecosx⋅(−sinx⋅x′)(1.2)

Так как x′=1, то продолжим равенство (1.2):

y′=(ecosx)′=ecosx⋅(cosx)′=ecosx⋅(−sinx⋅x′)=ecosx⋅(−sinx⋅1)=−sinx⋅ecosx(1.3)

Итак, из равенства (1.3) имеем: y′=−sinx⋅ecosx. Естественно, что пояснения и промежуточные равенства обычно пропускают, записывая нахождение производной в одну строку, – как в равенстве (1.3). Итак, производная сложной функции найдена, осталось лишь записать ответ.
Ответ: y′=−sinx⋅ecosx.

Пример №2

Найти производную функции y=9⋅arctg12(4⋅lnx).

Решение

Нам необходимо вычислить производную y′=(9⋅arctg12(4⋅lnx))′. Для начала отметим, что константу (т.е. число 9) можно вынести за знак производной:

y′=(9⋅arctg12(4⋅lnx))′=9⋅(arctg12(4⋅lnx))′(2.1)

Теперь обратимся к выражению (arctg12(4⋅lnx))′. Чтобы выбрать нужную формулу из таблицы производных было легче, я представлю рассматриваемое выражение в таком виде: ((arctg(4⋅lnx))12)′. Теперь видно, что необходимо использовать формулу №2, т.е. (uα)′=α⋅uα−1⋅u′. В эту формулу подставим u=arctg(4⋅lnx) и α=12:

$$\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$$

$$\left(\left(arctg\left(4\cdot\ln x\right)\right)^{12}\right)' = 12\cdot\left(arctg\left(4\cdot\ln x\right)\right)^{12-1}\cdot\left(arctg\left(4\cdot\ln x\right)\right)' = 12\cdot\left(arctg\left(4\cdot\ln x\right)\right)^{11}\cdot\left(arctg\left(4\right.\right.$$

Дополняя равенство (2.1) полученным результатом, имеем:

y′=(9⋅arctg12(4⋅lnx))′=9⋅(arctg12(4⋅lnx))′=108⋅(arctg(4⋅lnx))11⋅(arctg(4⋅lnx))′(2.2)

Примечание: показать\скрыть

Теперь нужно найти (arctg(4⋅lnx))′. Используем формулу №19 таблицы производных, подставив в неё u=4⋅lnx:

(arctg(4⋅lnx))′=11+(4⋅lnx)2⋅(4⋅lnx)′

Немного упростим полученное выражение, учитывая (4⋅lnx)2=42⋅(lnx)2=16⋅ln2x.

(arctg(4⋅lnx))′=11+(4⋅lnx)2⋅(4⋅lnx)′=11+16⋅ln2x⋅(4⋅lnx)′

Равенство (2.2) теперь станет таким:

y′=(9⋅arctg12(4⋅lnx))′=9⋅(arctg12(4⋅lnx))′==108⋅(arctg(4⋅lnx))11⋅(arctg(4⋅lnx))′=108⋅(arctg(4⋅lnx))11⋅11+16⋅ln2x⋅(4⋅lnx)′(2.3)

Осталось найти (4⋅lnx)′. Вынесем константу (т.е. 4) за знак производной: (4⋅lnx)′=4⋅(lnx)′. Для того, чтобы найти (lnx)′ используем формулу №8, подставив в нее u=x: (lnx)′=1x⋅x′. Так как x′=1, то (lnx)′=1x⋅x′=1x⋅1=1x. Подставив полученный результат в формулу (2.3), получим:

y′=(9⋅arctg12(4⋅lnx))′=9⋅(arctg12(4⋅lnx))′==108⋅(arctg(4⋅lnx))11⋅(arctg(4⋅lnx))′=108⋅(arctg(4⋅lnx))11⋅11+16⋅ln2x⋅(4⋅lnx)′==108⋅(arctg(4⋅lnx))11⋅11+16⋅ln2x⋅4⋅1x=432⋅arctg11(4⋅lnx)x⋅(1+16⋅ln2x).

Напомню, что производная сложной функции чаще всего находится в одну строку, – как записано в последнем равенстве. Поэтому при оформлении типовых расчетов или контрольных работ вовсе не обязательно расписывать решение столь же подробно.

Ответ: y′=432⋅arctg11(4⋅lnx)x⋅(1+16⋅ln2x).

Пример №3

Найти y′ функции y=sin3(5⋅9x)−−−−−−−−−√7.

Решение

Для начала немного преобразим функцию y, выразив радикал (корень) в виде степени: y=sin3(5⋅9x)−−−−−−−−−√7=(sin(5⋅9x))37. Теперь приступим к нахождению производной. Так как y=(sin(5⋅9x))37, то:

y′=((sin(5⋅9x))37)′(3.1)

Используем формулу №2 из таблицы производных, подставив в неё u=sin(5⋅9x) и α=37:

((sin(5⋅9x))37)′=37⋅(sin(5⋅9x))37−1(sin(5⋅9x))′=37⋅(sin(5⋅9x))−47(sin(5⋅9x))′

Продолжим равенство (3.1), используя полученный результат:

y′=((sin(5⋅9x))37)′=37⋅(sin(5⋅9x))−47(sin(5⋅9x))′(3.2)

Теперь нужно найти (sin(5⋅9x))′. Используем для этого формулу №9 из таблицы производных, подставив в неё u=5⋅9x:

(sin(5⋅9x))′=cos(5⋅9x)⋅(5⋅9x)′

Дополнив равенство (3.2) полученным результатом, имеем:

y′=((sin(5⋅9x))37)′=37⋅(sin(5⋅9x))−47(sin(5⋅9x))′==37⋅(sin(5⋅9x))−47cos(5⋅9x)⋅(5⋅9x)′(3.3)

Осталось найти (5⋅9x)′. Для начала вынесем константу (число 5) за знак производной, т.е. (5⋅9x)′=5⋅(9x)′. Для нахождения производной (9x)′ применим формулу №5 таблицы производных, подставив в неё a=9 и u=x: (9x)′=9x⋅ln9⋅x′. Так как x′=1, то (9x)′=9x⋅ln9⋅x′=9x⋅ln9. Теперь можно продолжить равенство (3.3):

y′=((sin(5⋅9x))37)′=37⋅(sin(5⋅9x))−47(sin(5⋅9x))′==37⋅(sin(5⋅9x))−47cos(5⋅9x)⋅(5⋅9x)′=37⋅(sin(5⋅9x))−47cos(5⋅9x)⋅5⋅9x⋅ln9==15⋅ln97⋅(sin(5⋅9x))−47⋅cos(5⋅9x)⋅9x.

Можно вновь от степеней вернуться к радикалам (т.е. корням), записав (sin(5⋅9x))−47 в виде 1(sin(5⋅9x))47=1sin4(5⋅9x)−−−−−−−−−√7. Тогда производная будет записана в такой форме:

y′=15⋅ln97⋅(sin(5⋅9x))−47⋅cos(5⋅9x)⋅9x=15⋅ln97⋅cos(5⋅9x)⋅9xsin4(5⋅9x)−−−−−−−−−√7.

Ответ: y′=15⋅ln97⋅cos(5⋅9x)⋅9xsin4(5⋅9x)−−−−−−−−−√7.

Пример №4

Показать, что формулы №3 и №4 таблицы производных есть частный случай формулы №2 этой таблицы.

Решение

В формуле №2 таблицы производных записана производная функции uα. Подставляя α=−1 в формулу №2, получим:

(u−1)′=−1·u−1−1·u′=−u−2·u′(4.1)

Так как u−1=1u и u−2=1u2, то равенство (4.1) можно переписать так: (1u)′=−1u2·u′. Это и есть формула №3 таблицы производных.

Вновь обратимся к формуле №2 таблицы производных. Подставим в неё α=12:

(u12)′=12·u12−1·u′=12u−12·u′(4.2)

Так как u12=u−−√ и u−12=1u12=1u−−√, то равенство (4.2) можно переписать в таком виде:

(u−−√)′=12·1u−−√·u′=12u−−√·u′

Полученное равенство (u−−√)′=12u−−√·u′ и есть формула №4 таблицы производных. Как видите, формулы №3 и №4 таблицы производных получаются из формулы №2 подстановкой соответствующего значения α.

Пример №5

Найти y′, если y=arcsin2x.

Решение

Нахождение производной сложной функции в данном примере запишем без подробных пояснений, которые были даны в предыдущих задачах.

$$y' = \left(\arcsin 2^x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(2^x\right)^2}}\cdot\left(2^x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-2^{2x}}}\cdot 2^x\ln 2 = \frac{2^x\ln 2}{\sqrt{1-2^{2x}}}.$$

Ответ: y′=2xln21−22x−−−−−−√.

Пример №6

Найти y′, если y=7·lnsin3x.

Решение

Как и в предыдущем примере, нахождение производной сложной функции укажем без подробностей. Желательно записать производную самостоятельно, лишь сверяясь с указанным ниже решением.

$$y' = \left(7\cdot\ln\sin^3 x\right)' = 7\cdot\left(\ln\sin^3 x\right)' = 7\cdot\frac{1}{\sin^3 x}\cdot\left(\sin^3 x\right)' = 7\cdot\frac{1}{\sin^3 x}\cdot 3\sin^2 x\cdot\left(\sin x\right)' =$$

$$= 21\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = 21\cdot\frac{\cos x}{\sin x} = 21\cdot ctg\, x.$$

Ответ: y′=21·ctgx.

Пример №7

Найти y′, если y=9tg4(log2(2·cosx)).

$$y' = \left(9 \cdot \mathrm{tg}^{-4}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)\right)' = 9 \cdot \left(\mathrm{tg}^{-4}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)\right)' =$$

$$= 9 \cdot (-4) \cdot \mathrm{tg}^{-5}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right) \cdot \left(\mathrm{tg}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)\right)' =$$

$$= -36 \cdot \mathrm{tg}^{-5}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)} \cdot \left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)' =$$

$$= -36 \cdot \mathrm{tg}^{-5}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \cos x \cdot \ln 2} \cdot (2\cos x)' =$$

$$= -\frac{18}{\ln 2} \cdot \mathrm{tg}^{-5}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-2\sin x) =$$

$$= \frac{36}{\ln 2} \cdot \mathrm{tg}^{-5}\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{36}{\ln 2} \cdot \frac{\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^5\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right) \cdot \cos^2\left(\log_2(2 \cdot \cos x)\right)}.$$