Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.

Пусть на плоскости даны две прямые $y = k_1 x + b_1;\ y = k_2 x + b_2$.

Обозначим через φ- угол между двумя прямыми $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

Тогда по известной формуле тригонометрии

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Итак, тангенс угла между двумя прямыми вычисляется по формуле

$$tgj = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 Чk_2}$$

Ясно, что две прямые будут параллельны, если их угловые коэффициенты будут равны.

Итак, условие параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$

Если две прямые перпендикулярны, т.е. угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$, мы получим $tg\varphi = tg\frac{\pi}{2} = \infty$.

Это будет иметь место, когда $1 + k_1 k_2 = 0$, т.е. $k_1 k_2 = -1$

Итак, условие перпендикулярности двух прямых: $k_1 k_2 = -1$.

Пусть прямые заданы общими уравнениями:

$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Вектор $\vec{n}_1(A_1; B_1) \perp$ прямой $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$.

Вектор $\vec{n}_2(A_2; B_2) \perp$ прямой $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

Угол между данными прямыми равен углу между нормальными векторами прямых: $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{n}_1 \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Окончательно, получаем $\cos\varphi = \dfrac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Прямые будут параллельны, если их нормальные векторы параллельны. Условие параллельности двух прямых будет иметь вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямые совпадают.

Условие перпендикулярности двух прямых есть условие перпендикулярности нормальных векторов

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$$

Пример 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1,3)$, параллельно прямой 2x-5y+6=0.

Решение. Так как искомая прямая должна быть параллельна данной, то нормальный вектор данной прямой является нормальным вектором искомой прямой. Зная нормальный вектор $\vec{n}(2,-5)$ и точку $M_0(-1,3)$, мы можем написать уравнение искомой прямой

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

2(x+1)-5(y-3)=0

Окончательно, получаем 2x-5y+17=0

Пример 2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-3,2)$ перпендикулярно прямой x-3y-7=0.

Решение. Условие перпендикулярности двух прямых $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$

Мы имеем $A_1=1$; $B_1= - 3$.

Условие перпендикулярности будет выполнено, если $A_2=3$; $B_2=1$.

Действительно, $1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 0$

Значит, нормальный вектор искомой прямой $\vec{n}_2(3,1)$

Уравнение искомой прямой $3(x+3)+1(y-2)=0$

или, окончательно, $3x+y+7=0$

Расстояние от точки до прямой на плоскости — это кратчайшее расстояние от точки до прямой в евклидовой геометрии.

Формула для вычисления расстояния от точки до прямой на плоскости

Если задано уравнение прямой Ax + By + C = 0, то расстояние от точки $M(M_x, M_y)$ до прямой можно найти, используя следующую формулу

$$d = \frac{|A \cdot M_x + B \cdot M_y + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример 1.

Найти расстояние между прямой 3x + 4y - 6 = 0 и точкой M(-1, 3).

Решение. Подставим в формулу коэффициенты прямой и координаты точки

$$d = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-3 + 12 - 6|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3|}{5} = 0.6$$

Ответ: расстояние от точки до прямой равно 0.6.

Решить

С 5.3. (Бек 5.10) Установить взаимное расположение прямых данной пары; если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения:

1) $x - 3y - 2 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$;

2) $x + 3y - 1 = 0$ и $2 - 2x - 6y = 0$;

3) $-x - y - 3 = 0$ и $3x + 3y + 1 = 0$;

4) $x = 1 + 2t$, $y = 1 - 7t$ и $x = 2 - t$, $y = 2 + t$.

Замечание. Использование одной и той же буквы для обозначения параметра в уравнениях различных прямых может привести к ошибке.

С 5.4. (Бек 5.11) При каких a прямые $ax - 4y = 6$ и $x - ay = 3$:

1) пересекаются; 2) параллельны: 3) совпадают

Контрольные работы

7.1. Треугольник на плоскости

Содержание заданий

1 Написать уравнение прямой, проходящей через точки А и В.

2 Написать уравнение прямой, проходящей через точку С параллельно прямой АВ.

3 Написать уравнение прямой, проходящей через точку С перпендикулярно прямой АВ.

4 Найти проекцию точки С на эту прямую.

5 Найти расстояние от точки А и В до этой прямой.

6 Найти площадь треугольника АВС.

7 Написать уравнение высоты треугольника АВС, выходящей из вершины А.

8 Написать уравнение медианы треугольника АВС, выходящей из вершины А.

9 Написать уравнение средней линии треугольника АВС, параллельной стороне АВ.

10 Найти величину угла А в треугольнике АВС.

11 Треугольник АВС дополнен до параллелограмма ABCD (отрезок АС его диагональ). Найти координаты вершины D и точки пересечения диагоналей Т.

Варианты заданий

1. А(0,1), В(0,-7), С(4,3)
11. А(-1,1), В(-9,3), С(-5,5)
21.А(1,1), В(1,5), С(9,0)
2. А(1,-2), В(-3,-2), С(2,-6)
12. А(2,-2), В(4,0), С(-2,2)
22. А(2,0), В(4,-8), С(6,-4)
3. А(-1,-1), В(-1,7), С(-5,-3)
13. А(-1,1), В(7,1), С(-3,5)
23. А(0,-2), В(-10,4), С(-8,4)
4. А(1,1), В(3,3), С(-3,5)
14. А(0,-1), В(-8,3), С(-2,2)
24. А(-2,2), В(-10,2), С(0,-6)
5. А(1,1), В(1,5), С(9,0)
15. А(0,1), В(-4,3), С(-4,5)
25. А(-1,1), В(3,5), С(1,9)
6. А(-1,-1), В(-9,-5), С(-5,-9)
16. А(1,0), В(-3,2), С(-3,4)
26. А(-2,0), В(-2,-4), С(-6,1)
7. А(0,-1), В(-10,5), С(-8,5)
17. А(-1,2), В(5,8), С(-1,8)
27. А(1,0), В(5,4), С(-4,3)

8. A(1,1), B(5,1), C(1,9)
18. A(-2,-1), B(-2,1), C(-6,3)
28 .A(0,-1), B(4,1), C(-4,3)
9 .A(-1,-1), B(1,-5), C(3,-3)
19 .A(2,-1), B(2,3), C(-2,-2)
29. A(-2,1), B(4,7), C(-2,7)
10. A(-2,-2), B(-4,-2), C(-2,6)
20. A(0,-1), B(2,5), C(-2,5)
30. A(0,1), B(-4,3), C(-4,5)