Практическая работа № 14
Операции над векторами. Вычисление скалярного произведения векторов

Цель: научиться находить координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

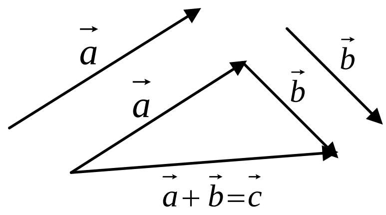
Краткая теория

Вектором называется направленный отрезок прямой.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\vec{AB}$. Для обозначения векторов употребляются также строчные латинские буквы: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x} \ldots$.

Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы, направленные в одну сторону, называются ***сонаправленными***. Коллинеарные векторы, направленные в противоположные стороны, - ***противоположно направленными***.

Два вектора называются ***равными***, если они сонаправлены и равны по модулю.



Сложение векторов. Для того чтобы построить сумму двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку А и отложить от неё вектор $\vec{AB} = \vec{a}$, а затем от точки В отложить вектор $\vec{BC} = \vec{b}$. Тогда вектор $\vec{AC}$ является искомой суммой: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

Координаты вектора $\vec{AB}$ с началом в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке $B\ (x_2;y_2;z_2)$ равны $(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Длина вектора $\vec{AB}$ вычисляется по формуле:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Суммой векторов $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}(b_1;b_2;b_3)$ называется вектор $\vec{c}$ с координатами $(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$.

Произведением вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}(\lambda a_1;\lambda a_2;\lambda a_3)$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение равно нулю.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения векторов:

- переместительное свойство: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

- сочетательное свойство: $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{b}\cdot\vec{a})$;

- распределительное свойство: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Формула для вычисления угла между векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Эта же формула в координатах:

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}+\vec{CD}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}3\vec{a}-0{,}6\vec{b}+0{,}2\vec{c}-5\vec{d}$, если $\vec{a}(-1;2;4)$, $\vec{b}(0;5;3)$, $\vec{c}(3;3;3)$, $\vec{d}(1;1;4)$.

3. Даны точки *A(1; 3; 0)*, *B(2; 3; -1)* и *C(1; 2; -1)*. Вычислите угол между векторами $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$.

4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=30^\circ$, $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=3$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

Вариант 2

1. Дана $ABCA_1B_1C_1$ – призма. Найти $\vec{AB}-\vec{AC_1}-\vec{BB_1}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}5\vec{a}+0{,}1\vec{b}+0{,}3\vec{c}-6\vec{d}$, если $\vec{a}(5;-1;-1)$, $\vec{b}(-1;1;1)$, $\vec{c}(0;2;-2)$, $\vec{d}(-3;2;0)$.

3. Даны точки *A(5; 0; 0)*, *B(1; 1; 1)* и *C(3; -1; 2)*. Вычислите угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=45^\circ$, $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=6$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

Вариант 3

1. Дан $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед. Найти $\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AA_1}+\vec{CD}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}8\vec{a}-0{,}4\vec{b}+3\vec{c}-2\vec{d}$, если $\vec{a}(-8;16;8)$, $\vec{b}(0;2;-8)$, $\vec{c}(-1;1;-1)$, $\vec{d}(6;-3;4)$.

3. Даны вершины треугольника A(-1; 4; 1), B(3; 4; -2), C(5; 2; -1). Найдите угол ABC.

4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=60^\circ$, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

Вариант 4

1. Дана $ABCA_1B_1C_1$ – призма. Найти $\vec{AB}-\vec{AC_1}-\vec{BB_1}$.

2. Найти координаты вектора $0{,}6\vec{a}+0{,}2\vec{b}+3\vec{c}-2\vec{d}$, если $\vec{a}(-1;-1;-1)$, $\vec{b}(-10;12;20)$, $\vec{c}(0;4;-6)$, $\vec{d}(-3;2;0)$.

3. Даны вершины треугольника A(1; 1; 5), B(-2; 0; 7), C(-3; -2; 5). Найдите угол ACB.

4. Известно, что $\vec{a}\,\hat{}\,\vec{c}=\vec{b}\,\hat{}\,\vec{c}=45^\circ$, $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\sqrt{2}$. Вычислите $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором?
2. Как найти сумму векторов, заданных графически?
3. Чему равны координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?
4. Как вычислить модуль вектора?
5. Что называется произведением вектора на число?
6. Что называется скалярным произведением двух векторов?
7. При каком условии скалярное произведение двух векторов может быть равно нулю?
8. Какими свойствами обладает скалярное произведение?
9. Чему равно скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
10. Как вычислить косинус угла между векторами, если известны их координаты?