ОП 1.1 математика

7.04.20г.

Тема: Сложные производные. Решение примеров.

Эл. Уч-к Колмогоров стр.115-121 выполнить №236-240

Методические рекомендации ля ознакомления с темой читать

Производная сложной функции. Примеры решений

На данном уроке мы научимся находить **производную сложной функции**. Урок является логическим продолжением занятия **Как найти производную?**, на котором мы разобрали простейшие производные, а также познакомились с правилами дифференцирования и некоторыми техническими приемами нахождения производных. Таким образом, если с производными функций у Вас не очень или какие-нибудь моменты данной статьи будут не совсем понятны, то сначала ознакомьтесь с вышеуказанным уроком. Пожалуйста, настройтесь на серьезный лад – материал не из простых, но я все-таки постараюсь изложить его просто и доступно.

На практике с производной сложной функции приходится сталкиваться очень часто, я бы даже сказал, почти всегда, когда Вам даны задания на нахождение производных.

Смотрим в таблицу на правило (№5) дифференцирования сложной функции:

$$(u(v))' = u'(v) \cdot v'$$

Разбираемся. Прежде всего, обратим внимание на запись $u(v)$. Здесь у нас две функции – u и v, причем функция v, образно говоря, вложена в функцию u. Функция такого вида (когда одна функция вложена в другую) и называется сложной функцией.

Функцию u я буду называть **внешней функцией**, а функцию v **– внутренней (или вложенной) функцией**.

! Данные определения не являются теоретическими и не должны фигурировать в чистовом оформлении заданий. Я применяю неформальные выражения «внешняя функция», «внутренняя» функция только для того, чтобы Вам легче было понять материал.

Для того, чтобы прояснить ситуацию, рассмотрим:

Пример 1

Найти производную функции $y = \sin(3x - 5)$

Под синусом у нас находится не просто буква «икс», а целое выражение $3x - 5$, поэтому найти производную сразу по таблице не получится. Также мы замечаем, что здесь невозможно применить первые четыре правила, вроде бы есть разность, но дело в том, что «разрывать на части» синус нельзя:

$$\cancel{\sin(3x-5) = \sin(3x) - \sin 5}$$

В данном примере уже из моих объяснений интуитивно понятно, что функция $y = \sin(3x-5)$ – это сложная функция, причем многочлен $3x-5$ является внутренней функцией (вложением), а $\sin(3x-5)$ – внешней функцией.

Первый шаг, который нужно выполнить при нахождении производной сложной функции состоит в том, чтобы **разобраться, какая функция является внутренней, а какая – внешней**.

В случае простых примеров вроде $\sin(3x-5)$ понятно, что под синус вложен многочлен $3x-5$. А как же быть, если всё не очевидно? Как точно определить, какая функция является внешней, а какая внутренней? Для этого я предлагаю использовать следующий прием, который можно проводить мысленно или на черновике.

Представим, что нам нужно вычислить на калькуляторе значение выражения $\sin(3x-5)$ при $x=1$ (вместо единицы может быть любое число).

Что мы вычислим в первую очередь? **В первую очередь** нужно будет выполнить следующее действие: $3 \cdot 1 - 5 = -2$, поэтому многочлен $3x-5$ и будет внутренней функцией v:

$$y = \sin\underbrace{(3x-5)}_{v}$$

Во вторую очередь нужно будет найти $\sin(-2)$, поэтому синус – будет внешней функцией:

$$y = \underbrace{\boxed{\sin\underbrace{(3x-5)}_{v}}}_{u(v)}$$

После того, как мы **РАЗОБРАЛИСЬ** с внутренней и внешней функциями самое время применить правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$.

Начинаем решать. С урока **Как найти производную?** мы помним, что оформление решения любой производной всегда начинается так – заключаем выражение в скобки и ставим справа вверху штрих:

$$y' = (\sin(3x-5))'$$

Сначала находим производную внешней функции $u'(v)$ (синуса), смотрим на таблицу производных элементарных функций и замечаем, что $(\sin x)' = \cos x$. **Все табличные формулы применимы и в том, случае, если «икс» заменить сложным выражением**, в данном случае:

$$u'(v) = \cos(3x-5)$$

Обратите внимание, что внутренняя функция $v = 3x-5$ не изменилась, её мы не трогаем.

Ну и совершенно очевидно, что $v' = (3x-5)'$

Результат применения формулы $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ в чистовом оформлении выглядит так:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)'$$

Далее мы берем производную внутренней функции, она очень простая:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0)$$

Постоянный множитель обычно выносят в начало выражения:

$$y' = (\sin(3x-5))' = \cos(3x-5) \cdot (3x-5)' = \cos(3x-5) \cdot (3-0) =$$
$$= 3\cos(3x-5)$$

Готово

Если осталось какое-либо недопонимание, перепишите решение на бумагу и еще раз прочитайте объяснения.

Пример 2

Найти производную функции $y = \cos 2x$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Пример 3

Найти производную функции $y = (2x+1)^5$

Как всегда записываем:

$$y' = ((2x+1)^5)'$$

Разбираемся, где у нас внешняя функция, а где внутренняя. Для этого пробуем (мысленно или на черновике) вычислить значение выражения $(2x+1)^5$ при $x=1$. Что нужно выполнить в первую очередь? В первую очередь нужно сосчитать чему равно основание: $2 \cdot 1 + 1 = 3$, значит, многочлен $(2x+1)$ – и есть внутренняя функция:

$$y = (\underbrace{2x+1}_{v})^5$$

И, только потом выполняется возведение в степень 3^5, следовательно, степенная функция – это внешняя функция:

$$y = \underbrace{\boxed{(\underbrace{2x+1}_{v})^5}}_{u(v)}$$

Согласно формуле $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$, сначала нужно найти производную от внешней функции, в данном случае, от степени. Разыскиваем в таблице нужную формулу: $(x^n)' = nx^{n-1}$. Повторяем еще раз: **любая табличная формула справедлива не только для «икс», но и для сложного выражения**. Таким образом, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5 \cdot (2x+1)^4 \cdot (2x+1)'$$

Снова подчеркиваю, что когда мы берем производную от внешней функции $u'(v)$, внутренняя функция v у нас не меняется:

$$5\cdot(2x+1)^4$$

не меняется

Теперь осталось найти совсем простую производную от внутренней функции и немного «причесать» результат:

$$y' = ((2x+1)^5)' = 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2x+1)' =$$
$$= 5\cdot(2x+1)^4\cdot(2+0) = 10\cdot(2x+1)^4$$

Готово.

Пример 4

Найти производную функции $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^7}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Для закрепления понимания производной сложной функции приведу пример без комментариев, попробуйте самостоятельно разобраться, порассуждать, где внешняя и где внутренняя функция, почему задания решены именно так?

Пример 5

а) Найти производную функции $y = arctg\sqrt{x}$

$$y' = (arctg\sqrt{x})' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

б) Найти производную функции $y = \sqrt{arctgx}$

$$y' = (\sqrt{arctgx})' = \frac{1}{2\sqrt{arctgx}}\cdot(arctgx)' = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{arctgx}}$$

Пример 6

Найти производную функции $y = \sqrt[3]{x^2+tgx+15}$

Здесь у нас корень, а для того, чтобы продифференцировать корень, его нужно представить в виде степени $x^{\frac{a}{b}}$. Таким образом, сначала приводим функцию в надлежащий для дифференцирования вид:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2+tgx+15})' = \left((x^2+tgx+15)^{\frac{1}{3}}\right)'$$

Анализируя функцию, приходим к выводу, что сумма трех слагаемых – это внутренняя функция, а возведение в степень – внешняя функция. Применяем правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)'$$

Степень снова представляем в виде радикала (корня), а для производной внутренней функции применяем простое правило дифференцирования суммы:

$$y' = (\sqrt[3]{x^2 + tgx + 15})' = \left(\left(x^2 + tgx + 15\right)^{\frac{1}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(x^2 + tgx + 15\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + tgx + 15)' =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot ((x^2)' + (tgx)' + (15)') =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 + tgx + 15)^2}} \cdot \left(2x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

Готово. Можно еще в скобках привести выражение к общему знаменателю и записать всё одной дробью. Красиво, конечно, но когда получаются громоздкие длинные производные – лучше этого не делать (легко запутаться, допустить ненужную ошибку, да и преподавателю будет неудобно проверять).

Пример 7

Найти производную функции $y = \dfrac{5}{\sqrt[5]{x + \ln x}}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

Интересно отметить, что иногда вместо правила дифференцирования сложной функции можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но такое решение будет выглядеть ~~как извращение~~ забавно. Вот характерный пример:

Пример 8

Найти производную функции $y = -\dfrac{1}{\cos x}$

Здесь можно использовать правило дифференцирования частного $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, но гораздо выгоднее найти производную через правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)'$$

Подготавливаем функцию для дифференцирования – выносим минус за знак производной, а косинус поднимаем в числитель:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)'$$

Косинус – внутренняя функция, возведение в степень – внешняя функция. Используем наше правило $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)' =$$

$$= -(-1) \cdot cos^{-2}x \cdot (\cos x)'$$

Находим производную внутренней функции, косинус сбрасываем обратно вниз:

$$y' = \left(-\frac{1}{\cos x}\right)' = -\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -(cos^{-1}x)' =$$

$$= -(-1) \cdot cos^{-2}x \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Готово. В рассмотренном примере важно не запутаться в знаках. Кстати, попробуйте решить его с помощью правила $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, ответы должны совпасть.

Пример 9

Найти производную функции $y = \frac{1}{\arccos^2 x}$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

До сих пор мы рассматривали случаи, когда у нас в сложной функции было только одно вложение. В практических же заданиях часто можно встретить производные, где, как матрешки, одна в другую, вложены сразу 3, а то и 4-5 функций.

Пример 10

Найти производную функции $y = 7^{\arcsin^2 x}$

Разбираемся во вложениях этой функции. Пробуем вычислить выражение $7^{\arcsin^2 x}$ с помощью подопытного значения $x = 1$. Как бы мы считали на калькуляторе?

Сначала нужно найти $\arcsin 1$, значит, арксинус – самое глубокое вложение:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

Затем этот арксинус единицы следует возвести в квадрат $\arcsin^2 1$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

И, наконец, семерку возводим в степень $7^{\arcsin^2 1}$:

$$7^{\boxed{\arcsin^2 x}}$$

То есть, в данном примере у нас три разные функции и два вложения, при этом, самой внутренней функцией является арксинус, а самой внешней функцией – показательная функция.

Начинаем решать

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})'$$

Согласно правилу $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ сначала нужно взять производную от внешней функции. Смотрим в таблицу производных и находим производную показательной функции: $(a^x)' = a^x \ln a$ Единственное отличие – вместо «икс» у нас сложное выражение $\arcsin^2 x$, что не отменяет справедливость данной формулы. Итак, результат применения правила дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v) \cdot v'$ следующий:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)'$$

Под штрихом у нас снова сложная функция! Но она уже проще. Легко убедиться, что внутренняя функция – арксинус, внешняя функция – степень. Согласно правилу дифференцирования сложной функции сначала нужно взять производную от степени:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)'$$

Теперь все просто, находим по таблице производную арксинуса и немного «причесываем» выражение:

$$y' = (7^{\arcsin^2 x})' = 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot (\arcsin^2 x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin^1 x \cdot (\arcsin x)' =$$
$$= 7^{\arcsin^2 x} \cdot \ln 7 \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{2\ln 7 \cdot 7^{\arcsin^2 x} \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Готово.

Пример 11

Найти производную функции $y = \ln^2(2x-1)$

Это пример для самостоятельного решения (ответ в конце урока).

На практике правило дифференцирования сложной функции почти всегда применяется в комбинации с остальными правилами дифференцирования.

Пример 12

Найти производную функции $y=-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x$

$$y'=(-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

Сначала используем правило дифференцирования суммы $(u\pm v)'=u'\pm v'$, заодно в первом слагаемом выносим постоянный множитель за знак производной по правилу $(Cu)'=Cu'$:

$$y'=(-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x)'=-2(xe^{3x})'+((x^2-4x+3)\sin 7x)'$$

В обоих слагаемых под штрихами у нас находится произведение функций, следовательно, нужно дважды применить правило $(uv)'=u'v+uv'$:

$$y'=(-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x)'=-2(xe^{3x})'+((x^2-4x+3)\sin 7x)'=$$
$$=-2((x)'e^{3x}+x(e^{3x})')+(x^2-4x+3)'\sin 7x+(x^2-4x+3)(\sin 7x)'$$

Замечаем, что под некоторыми штрихами у нас находятся сложные функции e^{3x}, $\sin 7x$. Каламбур, но это простейшие из сложных функций, и при определенном опыте решения производных Вы будете легко находить их устно. А пока запишем подробно, согласно правилу $(u(v))'=u'(v)\cdot v'$, получаем:

$$y'=(-2xe^{3x}+(x^2-4x+3)\sin 7x)'=-2(xe^{3x})'+((x^2-4x+3)\sin 7x)'=$$
$$=-2((x)'e^{3x}+x(e^{3x})')+(x^2-4x+3)'\sin 7x+(x^2-4x+3)(\sin 7x)'=$$
$$=-2(1\cdot e^{3x}+x\cdot e^{3x}\cdot(3x)')+(2x-4+0)\sin 7x+(x^2-4x+3)\cos 7x\cdot(7x)'=$$
$$=-2(e^{3x}+3xe^{3x})+(2x-4)\sin 7x+7(x^2-4x+3)\cos 7x$$

ОП 1.1 математика

8.04 20г. Тема: Вычисление производных смешанных функций

Эл. Уч-к Колмогоров выполнить № 231-235, используя таблицу производных в интернете.

Методические рекомендации для знакомства с темой

Задача 1.

Найти вторую производную от функции

$$y=\sqrt{\mathbf{3}-x^2}.$$

Указание

Найдите вначале первую производную данной функции, а затем воспользуйтесь тем, что

Решение

$$y' = \left(\left(3 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(3 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}};$$

$$y'' = -\left(\frac{x}{\sqrt{3 - x^2}}\right)' = -\frac{\sqrt{3 - x^2} - \frac{x(-2x)}{2\sqrt{3 - x^2}}}{3 - x^2} = -\frac{3 - x^2 + x^2}{\sqrt{\left(3 - x^2\right)^3}} = -\frac{3}{\sqrt{\left(3 - x^2\right)^3}}.$$

Ответ: $-\frac{3}{\sqrt{(3 - x^2)^3}}.$

Задача 2.

Найти вторую производную от функции $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

При $X = 1$.

Указание

Найдите вторую производную по формуле $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$,

А затем вычислите ее значение при $X = 1$.

Решение

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$y'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right)' = \left(\left(1 + x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{\left(1 + x^2\right)^3}}; \quad y''(1) = -\frac{1}{\sqrt{2^3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$

Задача 3.

Найти производную 4-го порядка от функции

$$y = \left(3x^3 - 2x^2 + x + 5\right)\ln x.$$

Указание

Воспользуйтесь тем, что $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Решение

$$y' = (9x^2 - 4x + 1)\ln x + (3x^3 + 2x^2 + x + 5)\frac{1}{x} =$$
$$= (9x^2 - 4x + 1)\ln x + 3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x};$$
$$y'' = (18x - 4)\ln x + (9x^2 - 4x + 1)\frac{1}{x} + 6x + 2 - \frac{5}{x^2} =$$
$$= (18x - 4)\ln x + 9x - 4 + \frac{1}{x} + 6x + 2 - \frac{5}{x^2} =$$
$$= (18x - 4)\ln x + 15x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2};$$
$$y''' = 18\ln x + (18x - 4)\frac{1}{x} + 15 - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3} =$$
$$= 18\ln x + 23 - \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{10}{x^3};$$
$$y^{(4)} = \frac{18}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} - \frac{30}{x^4} = \frac{2(9x^3 + 2x^2 + x - 15)}{x^4}.$$

Ответ: $\dfrac{2(9x^3 + 2x^2 + x - 15)}{x^4}$.

Задача 4. Найдите общее выражение для производной порядка *П* от функции

$$y = \frac{1}{x^2 - 9x + 20}.$$

Указание

Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}.$$

Решение

Вычислим подряд производные 1-го, 2-го, ... порядка от данной функции и попробуем определить вид зависимости выражения для *П*-й производной от ее порядка.

$$y' = \left(\frac{1}{x^2 - 9x + 20}\right)' = \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4}\right)' =$$
$$= \left((x-5)^{-1}\right)' - \left((x-4)^{-1}\right)' = -1\cdot(x-5)^{-2} - (-1)(x-4)^{-2};$$
$$y'' = (-1)(-2)(x-5)^{-3} - (-1)(-2)(x-4)^{-3};$$

....

$$y^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)(x-5)^{-(n+1)} - (-1)(-2)\ldots(-n)(x-4)^{-(n+1)} =$$
$$= (-1)^n \cdot n!\left(\frac{1}{(x-5)^{n+1}} - \frac{1}{(x-4)^{n+1}}\right).$$

Ответ: $(-1)^n \cdot n!\left(\frac{1}{(x-5)^{n+1}}-\frac{1}{(x-4)^{n+1}}\right).$

Задача 5.

Найдите общее выражение для производной порядка *П* от функции

$y=\cos 5x.$

Указание

Для упрощения воспользуйтесь формулами приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha; \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha;$$
$$\cos\left(\frac{3}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha; \qquad \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha.$$

Решение

$$y'=-5\sin 5x=5(-\sin 5x)=5\cos\left(\frac{\pi\cdot 1}{2}+5x\right);$$

$$y''=-5^2\cos 5x=5^2(-\cos 5x)=5^2\cos\left(\frac{\pi\cdot 2}{2}+5x\right);$$
$$y'''=5^3\sin 5x=5^3\cos\left(\frac{\pi\cdot 3}{2}+5x\right);$$
$$y^{(4)}=5^4\cos 5x=5^4\cos\left(\frac{\pi\cdot 4}{2}+5x\right);$$
....
$$y^{(n)}=5^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}+5x\right).$$

Ответ: $5^n\cos\left(\frac{\pi n}{2}+5x\right).$