ОП 1.1-математика

Занятие на 31.03.20 г. Тема: Решение заданий на нахождение производных используя таблицы производных –(в интернете).

Задания по учебнику Колмогорова А.Н. « Алгебра и начала анализа» 10-11 классы. № 209-213, стр. 114.

Методические указания:

При нахождении производной произведения и частного в реальных задачах всегда требуется применять сразу несколько правил дифференцирования, поэтому больше примеров на эти производные - в статье "**Производная произведения и частного функций**".

Здесь же (далее) - более простые примеры на производную произведения и частного, на которых Вы увереннее освоите алгоритмы вычислений.

Замечание. Следует не путать константу (то есть, число) как слагаемое в сумме и как постоянный множитель! В случае слагаемого её производная равна нулю, а в случае постоянного множителя она выносится за знак производных. Это типичная ошибка, которая встречается на начальном этапе изучения производных, но по мере решения уже нескольких одно- двухсоставных примеров средний студент этой ошибки уже не делает.

А если при дифференцировании произведения или частного у вас появилось слагаемое $u'v$, в котором u - число, например, 2 или 5, то есть константа, то производная этого числа будет равна нулю и, следовательно, всё слагаемое будет равно нулю (такой случай разобран в примере 10)..

По ходу не обойтись без преобразований выражений. Для этого может потребоваться открыть в новых окнах пособия **Действия со степенями и корнями** и **Действия с дробями**.

Если Вы ищете решения производных дробей со степенями и корнями, то есть, когда функция имеет вид вроде $y=\frac{2}{x}+\frac{x\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{1}{2x^3}$, то следуйте на занятие "Производная суммы дробей со степенями и корнями".

Пошаговые примеры - как найти производную

Пример 3. Найти производную функции

$(x-5)(2x-5)$.

Решение. Определяем части выражения функции: всё выражение представляет произведение, а его сомножители - суммы, во второй из которых одно из слагаемых содержит постоянный множитель. Применяем правило дифференцирования произведения: производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

$$((x-5)(2x-5))' =$$
$$= (x-5)'(2x-5)+(x-5)(2x-5)'.$$

Далее применяем правило дифференцирования суммы: производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций. В нашем случае в каждой сумме второе слагаемое со знаком минус. В каждой сумме видим и независимую переменную, производная которой равна единице, и константу (число), производная которой равна нулю. Итак, "икс" у нас превращается в единицу, а минус 5 - в ноль. Во втором выражении "икс" умножен на 2, так что двойку умножаем на ту же единицу как производную "икса". Получаем следующие значения производных:

$$(x-5)' = x' - 5' = 1+0 = 1.$$

$$(2x-5)' = (2x)' - 5' = 2(x)' - 0 = 2 \bullet 1 = 2.$$

Подставляем найденные производные в сумму произведений и получаем требуемую условием задачи производную всей функции:

$$(2x-5)+(x-5) \bullet 2 =$$
$$= (2x-5)+(2x-10) = 4x-15.$$

А проверить решение задачи на производную можно на **калькуляторе производных онлайн**.

Пример 4. Найти производную функции

$$\frac{x-5}{2x-5}.$$

Решение. От нас требуется найти производную частного. Применяем формулу дифференцирования частного: производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего числителя. Получаем:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)'=\frac{(x-5)'(2x-5)-(x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2}.$$

Производную сомножителей в числителе мы уже нашли в примере 2. Не забудем также, что произведение, являющееся вторым сомножителем в числителе в текущем примере берётся со знаком минус:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)'=\frac{(2x-5)-(2x-10)}{(2x-5)^2}=$$

$$=\frac{-5+10}{(2x-5)^2}=\frac{5}{(2x-5)^2}.$$

Если Вы ищете решения таких задач, в которых надо найти производную функции, где сплошное нагромождение корней и степеней, как, например, $y'=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-1$, то добро пожаловать на занятие **"Производная суммы дробей со степенями и корнями"**.

Пример 5. Найти производную функции

$$(2x-1)\sqrt{x}.$$

Решение. В данной функции видим произведение, один из сомножителей которых - квадратный корень из независимой переменной, с производной которого мы ознакомились в таблице производных. По правилу дифференцирования произведения и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$\left((2x-1)\sqrt{x}\right)'=(2x-1)'\sqrt{x}+(2x-1)\left(\sqrt{x}\right)'=$$

$$=2\sqrt{x}+(2x-1)\bullet\frac{1}{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+\frac{2x-1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2+2x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{4x+2x-1}{2\sqrt{x}}=\frac{6x-1}{2\sqrt{x}}.$$

.

Пример 6. Найти производную функции

Решение. В данной функции видим частное, делимое которого - квадратный корень из независимой переменной. По правилу дифференцирования частного, которое мы повторили и применили в примере 4, и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2x+1}\right)' = \frac{(\sqrt{x})'(2x+1)-\sqrt{x}\,(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1)-\sqrt{x}\,(2)}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(2x+1)^2}.$$

Чтобы избавиться от дроби в числителе, умножаем числитель и знаменатель на $2\sqrt{x}$:

$$\frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-\left(2\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x+1-4x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2}.$$

Пример 7. Найти производную функции

$$y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}..$$

Пример 8. Найти производную функции

$$y = \sqrt{x}\sin x\cos x..$$

Пример 9. Найти производную функции

$y = ax^2 + bx + c$, где a и b - константы..

Пример 10. Найти производную функции

$$y = 3e^x - 3^x..$$

Пример 11. Найти производную функции

$$y = \frac{4}{xe^x}.$$

Пример 12. Найти производную функции

$$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x..$$

ОП 1.1-математика

Занятие на 1.04..20 г. Тема: Решение заданий на нахождение производных сложной функции , используя таблицы производных –(в интернете).

Задания по учебнику Колмогорова А.Н. « Алгебра и начала анализа» 10-11 классы. № 224-225, стр.115-118

Методические указания:

. Понятие производной сложной функции

Пусть *y* – **сложная функция** *x*, т.е. *y* = *f*(*u*), *u* = *g*(*x*), или

$$y(x) = f\left[g(x)\right].$$

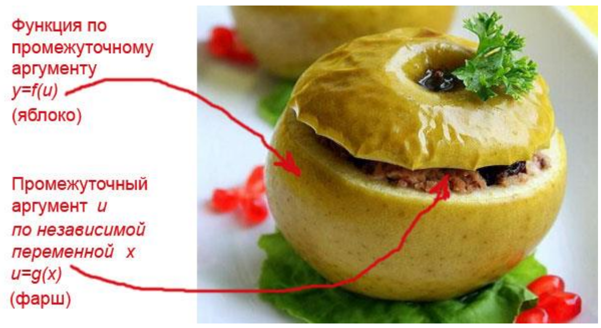
Если *g*(*x*) и *f*(*u*) – дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках *x* и *u* = *g*(*x*), то сложная функция также дифференцируема в точке *x* и находится по формуле

$$y'(x) = f'(u)\,g'(x)$$

Типичная ошибка при решении задач на производные - машинальное перенесение правил дифференцирования простых функций на сложные функции. Будем учиться избегать этой ошибки.

Посмотрите на формулу 9 в **таблице производных**. Исходная функция является функцией от функции, причём аргумент *x* является аргументом лишь второй функции, а вторая функция является аргументом первой функции, или, согласно более строгому определению - промежуточным аргументом по независимой переменной *x*.

А теперь посмотрите на картинку ниже, которая иллюстрирует решение задач на сложные производные по аналогии с простым примером из кулинарии - приготовлении запечёных яблок, фаршированных ягодами.



Итак, "яблоко" - это функция, аргументом которой является промежуточный аргумент, а промежуточный аргумент по независимой переменной *x*, в свою очередь, является "фаршем" (ягодами). Представим себе, что решая задачи на производные сложной функции, сначала помещаем яблоко с фаршем в особую (физико-математическую) духовку и устанавливаем режим 1. При таком режиме духовка воздействует только на "яблоко", поскольку нужно, допустим, больше пропечь яблоко, а фарш из ягод оставить более сочным, то есть обрабатывать в другом режиме. Итак, в при режиме 1 обрабатывается яблоко, а фарш остаётся незатронутым, или, ближе к нашим задачам, находим производную функции лишь от промежуточного аргумента, то есть, "яблока". Затем в духовке устанавливается режим 2, который воздействует только на фарш, иначе говоря, записываем производную функции, являющейся промежуточным аргументом по независимой переменной *x*. И, в конце концов, записываем произведение производной "яблока" и производной "фарша". Можно подавать!

Пример 1. Найти производную функции

$$s = (\sin x - 2\cos x)^3$$

Сначала определим, где здесь "яблоко", то есть функция по промежуточному аргументу *u*, а где "фарш", то есть промежуточный аргумент *u* по независимой переменной *x*. Определяем: возведение в степень - это функция по промежуточному аргументу, то есть "яблоко", а выражение в скобках (разность двух тригонометрических функций) - это промежуточный аргумент, то есть "фарш".

Тогда

$$s' = \left((\sin x - 2\cos x)^3\right)' = \\ = 3(\sin x - 2\cos x)^2 \bullet (\sin x - 2\cos x)'.$$

Далее по таблице производных (производная суммы или разности, производные синуса и косинуса) находим:

$$(\sin x - 2\cos x)' = (\sin x)' - (2\cos x)' = \\ = \cos x - 2(\cos x) = \cos x - 2(-\sin x) = \\ = \cos x + 2\sin x.$$

Требуемая в условии задачи производная (готовое "фаршированое яблоко"):

$$3(\sin x - 2\cos x)^2 \bullet (\cos x + 2\sin x).$$

Нахождение производной сложной логарифмической функции имеет свои особенности, поэтому у нас есть и урок "Производная логарифмической функции".

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \ln(ax^2 + c).$$

Неправильное решение: вычислять натуральный логарифм каждого слагаемого в скобках и искать сумму производных:

$$\cancel{y' = \left(\ln\left(ax^2\right)\right)' + \left(\ln\left(c\right)\right)'}.$$

Правильное решение: опять определяем, где "яблоко", а где "фарш". Здесь натуральный логарифм от выражения в скобках - это "яблоко", то есть функция по промежуточному аргументу *u*, а выражение в скобках - "фарш", то есть промежуточный аргумент *u* по независимой переменной *x*.

Тогда (применяя формулу 14 из таблицы производных)

$$y' = \left(\ln\left(ax^2 + c\right)\right)' = \frac{1}{ax^2 + c} \bullet \left(ax^2 + c\right)' =$$

$$= \frac{1}{ax^2 + c} \bullet 2ax = \frac{2ax}{ax^2 + c}.$$

Во многих реальных задачах выражение с логарифмом бывает несколько сложнее, поэтому и есть урок "Производная логарифмической функции".

Пример 3.Найти производную функции

$$y = \cos\left(x^3 - 3\right).$$

Неправильное решение:

$$\cancel{y' = \left(\cos\left(x^3\right)\right)' - \left(\cos 3\right)'}.$$

Правильное решение. В очередной раз определяем, где "яблоко", а где "фарш". Здесь косинус от выражения в скобках (формула 7 в таблице производных)- это "яблоко", оно готовится в режиме 1, воздействующем только на него, а выражение в скобках (производная степени - номер 3 в таблице производных) - это "фарш", он готовится при режиме 2, воздействующей только на него. И как всегда соединяем две производные знаком произведения. Результат:

$$y' = \left(\cos\left(x^3 - 3\right)\right)' = -\sin\left(x^3 - 3\right) \bullet \left(x^3 - 3\right)' =$$

$$= -\sin\left(x^3 - 3\right) \bullet 3x^2 = -3x^2 \bullet \sin\left(x^3 - 3\right).$$

Производная сложной логарифмической функции - частое задание на контрольных работах, поэтому настоятельно рекомендуем посетить урок "Производная логарифмической функции".

Первые примеры были на сложные функции, в которых промежуточный аргумент по независимой переменной был простой функцией. Но в практических заданиях нередко требуется найти производную сложной функции, где промежуточный аргумент или сам является сложной функцией или содержит такую функцию. Что делать в таких случаях? Находить производные таких функций по таблицам и правилам дифференцирования. Когда найдена производная промежуточного аргумента, она просто подставляется в нужное место формулы. Ниже – два примера, как это делается.

Кроме того, полезно знать следующее. Если сложная функция может быть представлена в виде цепочки из трёх функций

$$y = F(u),\ \ u = \varphi(v),\ \ v = \psi(x),$$

то её производную следует находить как произведение производных каждой из этих функций:

$$y'(x) = F'(u)\varphi'(v)\psi'(x).$$

Пример 4. Найти производную функции

$$y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Применяем правило дифференцирования сложной функции, не забывая, что в полученном произведении производных промежуточный аргумент по независимой переменной *x* не меняется:

$$y' = \left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right)' =$$
$$= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \bullet \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)'.$$

Готовим второй сомножитель произведения и применяем правило дифференцирования суммы:

$$\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)' = x' + \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = 1 + \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'.$$

Второе слагаемое - корень, поэтому

$$\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = \left(\left(x^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)'.$$

Таким образом получили, что промежуточный аргумент, являющийся суммой, в качестве одного из слагаемых содержит сложную функцию:

возведение в степень - сложная функция, а то, что возводится в степень - промежуточный аргумент по независимой переменной *x*.

Поэтому вновь применим правило дифференцирования сложной функции:

$$\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)'.$$

Степень первого сомножителя преобразуем в корень, а дифференцируя второй сомножитель, не забываем, что производная константы равна нулю:

$$\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(x^2+1\right)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\bullet 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Теперь можем найти производную промежуточного аргумента, нужного для вычисления требуемой в условии задачи производной сложной функции *y*:

$$1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Тогда

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\bullet\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 5.Найти производную функции

$$y=\frac{3}{\sin^2 x}+\frac{\cos^3 x}{3}.$$

Сначала воспользуемся правилом дифференцирования суммы:

$$y'=\left(\frac{3}{\sin^2 x}\right)'+\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)'.$$

Получили сумму производных двух сложных функций. Находим первую из них:

$$\left(\frac{3}{\sin^2 x}\right)'=\left(3\sin^{-2} x\right)'.$$

Здесь возведение синуса в степень - сложная функция, а сам синус - промежуточный аргумент по независимой переменной *x*. Поэтому воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции, попутно **вынося множитель за скобки**:

$$\left(3\sin^{-2}x\right)'=3\left(\sin^{-2}x\right)'=$$

$$=3\bullet(-2)\sin^{-3}x\bullet(\sin x)'=$$

$$=-6\sin^{-3}x\bullet\cos x=-\frac{6\cos x}{\sin^3 x}.$$

Теперь находим второе слагаемое из образующих производную функции *y*:

$$\left(\frac{\cos^3 x}{3}\right)'=\frac{1}{3}\left(\cos^3 x\right).$$

Здесь возведение косинуса в степень - сложная функция *f[g(x)]*, а сам косинус - промежуточный аргумент по независимой переменной *x*. Снова воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$\frac{1}{3}\left(\cos^3 x\right)'=\frac{1}{3}\bullet 3\cos^2 x\bullet(\cos x)'=$$

$$=\cos^2 x\bullet(-\sin x)=$$

$$=-\cos^2 x\bullet\sin x.$$

Результат - требуемая производная:

$$y'=-\frac{6\cos x}{\sin^3 x}-\cos^2 x\bullet\sin x.$$

Пример 6.Найти производную функции

$y=\sin\left[(\ln x)^3\right]$.

Пример 7. Найти производную функции

$y=\ln^2\left(x^4+\sqrt{3x}\right)$.

Э М 1.1 математика

Занятие на 30.03 .20 г. Тема: Практическая работа «Нахождение производных простых функций»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Вычисление производных

Цель: совершенствовать умения вычислять производные элементарных функций.

Методические указания и теоретические сведения к практической работе

Произво́дная (функции в точке) — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции (в данной точке). Определяется как **предел отношения** приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).

Процесс вычисления производной называется **дифференци́рованием**. Обратный процесс — нахождение первообразной — интегрирование.

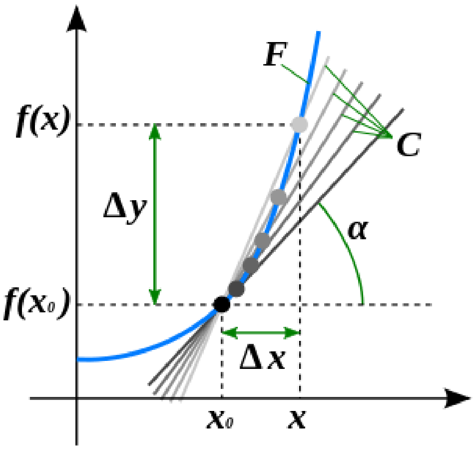


Иллюстрация понятия производной

Определение производной функции через предел

Пусть в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определена функция $f : U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Производной функции f в точке x_0 называется предел, если он существует,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Общепринятые обозначения производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

$$f'(x_0) = f'_x(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \dot{y}(x_0).$$

Заметим, что последнее обычно обозначает производную по времени (в теоретической механике).

Таблица производных

Производные степенных функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций

$(c)' = 0$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Правила дифференцирования

Операция нахождения производной называется **дифференцированием**. При выполнении этой операции часто приходится работать с частными, суммами, произведениями функций, а также с «функциями функций», то есть сложными функциями. Исходя из определения производной, можно вывести правила дифференцирования, облегчающие эту работу. Если *C* — постоянное число и *f=f(x), g=g(x)* — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

- $C' = 0$
- $x' = 1$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
-
- …(g ≠ 0)
- (g ≠ 0)

Вариант 1.

Найти производные первого порядка следующих функций:

1) $y = 3x^5$; 2) $y = 4x^{-7}$; 3) $y = 2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x}$; 4) $y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$;

5) $y = (2x - 1)(x^2 + 3x - 4)$; 6) $y = \frac{x^2-3x+5}{2-x}$;

7) $y = (x^3 - 4x^2 + 1)^6$; 8) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

9) $y = \ln\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}$;   10) $y = x^2 + \sin 3x$;

11) $y = e^{\cos x} + \ln x$;   12) $y = 4 \cdot 5^x$;

13) $y = \mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$;   14) $y = \sin x \cos x$;

15)$y = e^{x^2+5x} \cdot \ln(2x+5) - \sqrt[3]{2x+5}$ в точке $x_0 = -1$.

Э М 1.1 математика. Занятие на 1.04..20 г

Тема: Работа над ошибками. Производная в физике и технике

стр. 133-138 № 217-278

Методические указания:

Правило первое: выносим константу

Константу можно вынести за знак производной. Более того - это нужно делать. При решении примеров по математике возьмите за правило - ***если можете упростить выражение, обязательно упрощайте***.

Пример. Вычислим производную:

$$y' = (3\cos x)' = 3*(\cos x)' = -3\sin x$$

Правило второе: производная суммы функций

Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций. То же самое справедливо и для производной разности функций.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

Не будем приводить доказательство этой теоремы, а лучше рассмотрим практический пример.

Найти производную функции:

$$y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4$$

Решение:

$$y' = \left(\frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4\right)' = \left(\frac{9}{x^3}\right)' + \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' - \left(\frac{2}{x}\right)' + \left(5x^4\right)' =$$
$$= -\frac{27}{x^4} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2} + 20x^3$$

Правило третье: производная произведения функций

Производная произведения двух дифференцируемых функций вычисляется по формуле:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Пример: найти производную функции:

$$y = arctg^3 2x \cdot \cos 8x^5$$

$$y' = \left(arctg^3 2x \cdot \cos 8x^5\right)' = (arctg^3 2x)' \cos 8x^5 + arctg^3 2x \left(\cos 8x^5\right)' =$$
$$= 3arctg^2 2x * \left(arctg 2x\right)' \cos 8x^5 - arctg^3 2x * \sin 8x^5 \left(8x^5\right)' =$$
$$= \frac{3arctg^2 2x}{1+4x^2}\left(2x\right)' * \cos 8x^5 - 40x^4 arctg^3 2x * \sin 8x^5 =$$
$$= \frac{6arctg^2 2x}{1+4x^2} * \cos 8x^5 - 40x^4 arctg^3 2x * \sin 8x^5$$

Решение:

Здесь важно сказать о вычислении производных сложных функций. Производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Её решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков – И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Ньютон пришёл к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости).

В физике производная применяется в основном для вычисления наибольших или наименьших значений каких-либо величин. Рассмотрим на примерах применение производной:

Задача 1:Потенциальная энергия U поля частицы, в котором находится другая, точно такая же частица имеет вид: $U = a/r^2 – b/r$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние между частицами. Найти: а)
значение r_0 соответствующее равновесному положению частицы; б) выяснить устойчиво ли это положение; в) F_{max} значение силы притяжения; г) изобразить примерные графики зависимости $U(r)$ и $F(r)$.

Решение: Для определения r_0 соответствующего равновесному

положению частицы исследуем $f = U(r)$ на экстремум.

Используя связь между потенциальной энергией поля

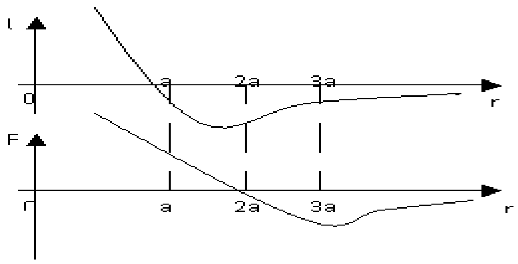
U и F, тогда $F = -dU/dr$, получим $F = -dU/dr = - (-2a/r^3+b/r^2) = 0;$

при этом $r = r_0$; $2a/r^3 = b/r^2 => r_0 = 2a/b$;

Устойчивое или неустойчивое равновесие определим по знаку второй производной:

$d^2U/dr_0^2= dF/dr_0=-6a/r_0^4 + 2b/r_0^3 = -6a/(2a/b)^4+2b/(2a/b)^3=(-b^4/8a^3)<0$;

равновесие устойчивое.



Для определения F_{max} притяжения исследую на экстремумы функцию:

$F = 2a/r^3— b/r^2$;

$dF/dr = -6a/r^4 + 2b/ r^3 = 0$;

при $r = r_1 = 3a/b$;

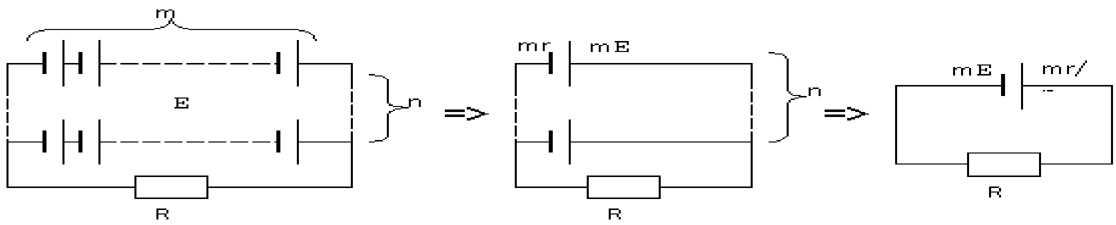
подставляя, получу $F_{max} = 2a/r^3_1 — b/r^3_1 = - b^3/27a^2$;

$U(r) = 0$; при $r = a/b$; $U(r)_{min}$ при $r = 2, a/b = r_0$;

$F = 0;$ $F(r)_{max}$ при $r = r_1 = 3a/b$;

Ответ: $F(r)_{max}$ при $r = r_1 = 3a/b$;

Задача 2: . Цепь с внешним сопротивлением $R = 0,9$ *Ом* питается от батареи из $k=36$ одинаковых источников, каждый из которых имеет ЭДС $E=2$ *В* и внутреннее сопротивление $r_0 = 0,4$ *Ом*. Батарея включает n групп, соединенных параллельно, а в каждой из них содержится m последовательно соединенных аккумуляторов. При каких значениях m, n будет получена максимальная J во внешнем R.



Решение:

При последовательном соединении аккумуляторов $E_{гр} = m*E$; $r_{гр} = r_0*m$;

а при параллельном соединении одинаковых $r_{бат} = r_0 m/n$; $E_{бат} = m*E$,

По закону Ома $J = mE/(R + r_0 m/n) = mEn/(nR + r_0 m)$

Т.к. k – общее число аккумуляторов, то $k = mn$;

$J = kE/(nR + r_0 m) = kE/(nR + kr_0/n)$;

Для нахождения условия при котором J тока в цепи максимальная исследую функцию $J = J(n)$ на экстремум взяв производную по n и приравняв ее к нулю.

J'_n-$(kE(R—kr_0/n^2))/ (nR + kr_0/n)^2 = 0;$

$n^2 = \underline{kr/R}$

$n = \sqrt{}kr/R = \sqrt{}3,6*0,4/0,9 = 4$;

$m = k/n = 36/4 = 9$;

при этом $J_{max} = kE/(nR + mr_0) = 36*2/(4*0,9 + 9*0,4) = 10\ A$;

Ответ: $n = 4, m = 9$.

Таким образом, применение производной довольно широко, и его можно полностью охватить в работе такого типа, однако я попытался раскрыть основные базовые моменты. В наше время, в связь с научно-техническим прогрессом, в частности с быстрой эволюцией вычислительных систем, дифференциальное исчисление становиться всё более актуальными в решении как простых, так и сверхсложных задач.

ИС 1.1 30.03 20. математика

Тема: «Вычисление преелов» А.Н.Колмогоров Алгебра и начала анализа

стр. 106-107 №197-201

Методические рекомендации

Теория пределов – раздел математического анализа. Наряду с системами линейных уравнений и диффурами пределы доставляют всем студентам, изучающим математику, немало хлопот. Чтобы решить предел, порой приходится применять массу хитростей и выбирать из множества способов решения именно тот, который подойдет для конкретного примера.

В этой статье мы не поможем вам понять пределы своих возможностей или постичь пределы контроля, но постараемся ответить на вопрос: как понять пределы в высшей математике? Понимание приходит с опытом, поэтому заодно приведем несколько подробных примеров решения пределов с пояснениями.

Ежедневная рассылка с полезной информацией для студентов всех направлений – на нашем телеграм-канале.

Понятие предела в математике

Первый вопрос: что это вообще за предел и предел чего? Можно говорить о пределах числовых последовательностей и функций. Нас интересует понятие предела функции , так как именно с ними чаще всего сталкиваются студенты. Но сначала - самое общее определение предела:

Допустим, есть некоторая переменная величина. Если эта величина в процессе изменения неограниченно приближается к определенному числу ***a***, то ***a*** – предел этой величины.

Для определенной в некотором интервале функции ***f(x)=y*** пределом называется такое число ***A***, к которому стремится функция при ***x***, стремящемся к определенной точке ***a***. Точка ***a*** принадлежит интервалу, на котором определена функция.

Звучит громоздко, но записывается очень просто:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Lim - от английского **limit** - предел.

Существует также геометрическое объяснение определения предела, но здесь мы не будем лезть в теорию, так как нас больше интересует практическая, нежели теоретическая сторона вопроса. Когда мы говорим, что ***x*** стремится к какому-то значению, это значит, что переменная не принимает значение числа, но бесконечно близко к нему приближается.

Приведем конкретный пример. Задача - найти предел.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}$$

Чтобы решить такой пример, подставим значение ***x=3*** в функцию. Получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}=\lim_{x\to 3}\frac{18-9-5}{4}=1$$

Кстати, если Вас интересуют базовые операции над матрицами, читайте отдельную статью на эту тему.

В примерах ***x*** может стремиться к любому значению. Это может быть любое число или бесконечность. Вот пример, когда ***x*** стремится к бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Интуитивно понятно, что чем больше число в знаменателе, тем меньшее значение будет принимать функция. Так, при неограниченном росте ***x*** значение ***1/x*** будет уменьшаться и приближаться к нулю.

Как видим, чтобы решить предел, нужно просто подставить в функцию значение, к которому стремиться ***x***. Однако это самый простой случай. Часто нахождение предела не так очевидно. В пределах встречаются неопределенности
типа ***0/0*** или ***бесконечность/бесконечность***. Что делать в таких случаях? Прибегать к хитростям!

Неопределенности в пределах

Неопределенность вида бесконечность/бесконечность
Пусть есть предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{1+x+3x^2}$$

Если мы попробуем в функцию подставить бесконечность, то получим бесконечность как в числителе, так и в знаменателе. Вообще стоит сказать, что в разрешении таких неопределенностей есть определенный элемент искусства: нужно заметить, как можно преобразовать функцию таким образом, чтобы неопределенность ушла. В нашем случае разделим числитель и знаменатель на ***x*** в старшей степени. Что получится?

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}$$

Из уже рассмотренного выше примера мы знаем, что члены, содержащие в знаменателе x, будут стремиться к нулю. Тогда решение предела:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-0-0}{0+0+3}=\frac{2}{3}$$

*Для раскрытия неопределенностей типа **бесконечность/бесконечность** делим числитель и знаменатель на **x** в высшей степени.*

Еще один вид неопределенностей: 0/0

В таких случаях рекомендуется раскладывать числитель и знаменатель на множители. Но давайте посмотрим на конкретный пример. Нужно вычислить предел:

$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}$$

Как всегда, подстановка в функцию значения ***x=-1*** дает ***0*** в числителе и знаменателе. Посмотрите чуть внимательнее и Вы заметите, что в числителе у нас квадратное уравнение. Найдем корни и запишем:

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-5)}{1+x}$$

Сократим и получим:

$$\lim_{x\to-1}2x-5=-7$$

Итак, если Вы сталкиваетесь с неопределенностью типа ***0/0*** – раскладывайте числитель и знаменатель на множители.

Чтобы Вам было проще решать примеры, приведем таблицу с пределами некоторых функций:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=1 \qquad (\alpha - \text{угол в радианах})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\arccos x)^2}{1-x}=2 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Правило Лопиталя в пределах

Еще один мощный способ, позволяющий устранить неопределенности обоих типов. В чем суть метода?

Если в пределе есть неопределенность, берем производную от числителя и знаменателя до тех пор, пока неопределенность не исчезнет.

Наглядно правило Лопиталя выглядит так:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Важный момент: предел, в котором вместо числителя и знаменателя стоят производные от числителя и знаменателя, должен существовать.

А теперь – реальный пример:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$$

Налицо типичная неопределенность ***0/0***. Возьмем производные от числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}=\lim_{x\to 2}\frac{-4x}{2x+4}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{-8}{8}=-1$$

Надеемся, что Вы сможете с пользой применить эту информацию на практике и найти ответ на вопрос "как решать пределы в высшей математике". Если нужно вычислить предел последовательности или предел функции в точке, а времени на эту работу нет от слова «совсем», обратитесь в профессиональный студенческий сервис за быстрым и подробным решением.

ИС 1.1 2.04.20 математика

Тема: «Вычисление производных»   А.Н.Колмогоров Алгебра и начала анализа

стр. 110-115 №212-216

Методические рекомендации

При нахождении производной произведения и частного в реальных задачах всегда требуется применять сразу несколько правил дифференцирования, поэтому больше примеров на эти производные - в статье "**Производная произведения и частного функций**".

Здесь же (далее) - более простые примеры на производную произведения и частного, на которых Вы увереннее освоите алгоритмы вычислений.

Замечание. Следует не путать константу (то есть, число) как слагаемое в сумме и как постоянный множитель! В случае слагаемого её производная равна нулю, а в случае постоянного множителя она выносится за знак производных. Это типичная ошибка, которая встречается на начальном этапе изучения производных, но по мере решения уже нескольких одно- двухсоставных примеров средний студент этой ошибки уже не делает.

А если при дифференцировании произведения или частного у вас появилось слагаемое $u'v$, в котором u - число, например, 2 или 5, то есть константа, то производная этого числа будет равна нулю и, следовательно, всё слагаемое будет равно нулю (такой случай разобран в примере 10).

Другая частая ошибка - механическое решение производной сложной функции как производной простой функции. Поэтому **производной сложной функции** посвящена отдельная статья. Но сначала будем учиться находить производные простых функций.

По ходу не обойтись без преобразований выражений. Для этого может потребоваться открыть в новых окнах пособия **Действия со степенями и корнями** и **Действия с дробями**.

Если Вы ищете решения производных дробей со степенями и корнями, то есть, когда функция имеет вид вроде $y=\frac{2}{x}+\frac{x\sqrt[3]{x}}{3}-\frac{1}{2x^3}$, то следуйте на занятие "Производная суммы дробей со степенями и корнями".

Пошаговые примеры - как найти производную

Пример 3. Найти производную функции

$$(x-5)(2x-5).$$

Решение. Определяем части выражения функции: всё выражение представляет произведение, а его сомножители - суммы, во второй из которых одно из слагаемых содержит постоянный множитель. Применяем правило дифференцирования произведения: производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из этих функций на производную другой:

$$((x-5)(2x-5))'=$$
$$=(x-5)'(2x-5)+(x-5)(2x-5)'.$$

Далее применяем правило дифференцирования суммы: производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций. В нашем случае в каждой сумме второе слагаемое со знаком минус. В каждой сумме видим и независимую переменную, производная которой равна единице, и константу (число), производная которой равна нулю. Итак, "икс" у нас превращается в единицу, а минус 5 - в ноль. Во втором выражении "икс" умножен на 2, так что двойку умножаем на ту же единицу как производную "икса". Получаем следующие значения производных:

$$(x-5)'=x'-5'=1+0=1.$$

$$(2x-5)'=(2x)'-5'=2(x)'-0=2\bullet 1=2.$$

Подставляем найденные производные в сумму произведений и получаем требуемую условием задачи производную всей функции:

$$(2x-5)+(x-5)\bullet 2=$$
$$=(2x-5)+(2x-10)=4x-15.$$

А проверить решение задачи на производную можно на **калькуляторе производных онлайн**.

Пример 4. Найти производную функции

$$\frac{x-5}{2x-5}.$$

Решение. От нас требуется найти производную частного. Применяем формулу дифференцирования частного: производная частного двух функций равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего числителя. Получаем:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)' = \frac{(x-5)'(2x-5)-(x-5)(2x-5)'}{(2x-5)^2}.$$

Производную сомножителей в числителе мы уже нашли в примере 2. Не забудем также, что произведение, являющееся вторым сомножителем в числителе в текущем примере берётся со знаком минус:

$$\left(\frac{x-5}{2x-5}\right)' = \frac{(2x-5)-(2x-10)}{(2x-5)^2} =$$

$$= \frac{-5+10}{(2x-5)^2} = \frac{5}{(2x-5)^2}.$$

Если Вы ищете решения таких задач, в которых надо найти производную функции, где сплошное нагромождение корней и степеней, как, например, $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 1$, то добро пожаловать на занятие **"Производная суммы дробей со степенями и корнями"**.

Пример 5. Найти производную функции

$$(2x-1)\sqrt{x}.$$

Решение. В данной функции видим произведение, один из сомножителей которых - квадратный корень из независимой переменной, с производной которого мы ознакомились в таблице производных. По правилу дифференцирования произведения и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$\left((2x-1)\sqrt{x}\right)' = (2x-1)'\sqrt{x} + (2x-1)\left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 2\sqrt{x} + (2x-1) \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{x}\right)^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x + 2x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x-1}{2\sqrt{x}}.$$

.

Пример 6. Найти производную функции

Решение. В данной функции видим частное, делимое которого - квадратный корень из независимой переменной. По правилу дифференцирования частного, которое мы повторили и применили в примере 4, и табличному значению производной квадратного корня получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{2x+1}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)'(2x+1) - \sqrt{x}\,(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x+1) - \sqrt{x}\,(2)}{(2x+1)^2} = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(2x+1)^2}.$$

Чтобы избавиться от дроби в числителе, умножаем числитель и знаменатель на $2\sqrt{x}$:

$$\frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1-\left(2\sqrt{x}\right)^2}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x+1-4x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\,(2x+1)^2}.$$

Пример 7. Найти производную функции

$$y = 3x^4 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}..$$

Пример 8. Найти производную функции

$$y = \sqrt{x}\sin x\cos x..$$

Пример 9. Найти производную функции

$y = ax^2 + bx + c$, где a и b - константы..

Пример 10. Найти производную функции

$y = 3e^x - 3^x$ ..

Пример 11. Найти производную функции

$y = \frac{4}{xe^x}$.

Пример 12. Найти производную функции

$y = x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 7x$. .

БУ.1.1. 31.03.20 математика

тема «Применение производной для исследования функций»

Колмогоров А.Н. стр.147-143 № 305-309

Методические рекомендации

Исследование функций с помощью производной

Редакция Lampa

#Математика#Теория#Начала матанализа#Производная#задание12#егэ

Монотонная функция

Возрастающая функция на отрезке [a,b]$[a,b]$ (или интервале, или множестве) — это такая функция f(x)$f(x)$, что для любых x_1\lt x_2$x_1<x_2$ из отрезка (интервала, множества) выполняется неравенство f(x_1)\lt f(x_2)$f(x_1)<f(x_2)$. В случае выполнения нестрогого неравенства f(x_1)\le f(x_2)$f(x_1)\le f(x_2)$ функция называется **неубывающей** на отрезке.

Убывающая функция на отрезке [a,b]$[a,b]$ (или интервале, или множестве) — это такая функция f(x)$f(x)$, что для любых x_1\lt x_2$x_1<x_2$ из отрезка (интервала, множества) выполняется неравенство f(x_1)\gt f(x_2)$f(x_1)>f(x_2)$. В случае выполнения нестрогого неравенства $f(x_1)\ge f(x_2)$ функция называется **невозрастающей** на отрезке.

Если функция является убывающей или возрастающей, то она называется **монотонной функцией**.

Пример: функция $y=\ln x$ является возрастающей.
Пример: функция $y=-3x+2$ является убывающей.

Точки экстремума

x_0 — **точка максимума** функции $f(x)$, если для всех достаточно близких точек x верно неравенство $f(x)\le f(x_0)$.

x_0 — **точка минимума** функции $f(x)$, если для всех достаточно близких точек верно неравенство $f(x)\ge f(x_0)$.

Точка экстремума — это точка максимума либо точка минимума функции.

x_2

x_1

x

y

$f(x_2)$

$f(x_1)$

ext{Точка максимума}Точка максимума

ext{Точка минимума}Точка минимума

Признак возрастания и убывания функции

Функция $f(x)$ **возрастает** на промежутке $(a;b)$, если производная $f'(x)>0$ на этом промежутке.

Функция f(x)$f(x)$ **убывает** на промежутке (a;b), если производная f'(x)\lt 0$f'(x)<0$ на этом промежутке.

Признаки максимума и минимума функции

x_0

a

b

Если функция f(x)$f(x)$ непрерывна на промежутке (a; b)$(a;b)$, возрастает на промежутке (a;x_0)$(a;x_0)$ и убывает на промежутке (x_0;b)$(x_0;b)$, то x_0x_0 является [точкой максимума функции]().
Признак **максимума** функции выполняется, если:

- f'(x)\gt 0$f'(x)>0$ на промежутке (a; x_0)$(a;x_0)$
- f'(x)=0$f'(x)=0$ в точке x_0x_0
- f'(x)\lt 0$f'(x)<0$ на промежутке (x_0; b)$(x_0;b)$

x_0
a

b

Если функция f(x)$f(x)$ непрерывна на промежутке (a; b)$(a;b)$, убывает на промежутке (a;x_0)$(a;x_0)$ и возрастает на промежутке (x_0;b)$(x_0;b)$, то x_0x_0 является [точкой минимума функции]().
Признак **минимума** функции выполняется, если:

- f'(x)\lt 0$f'(x)<0$ на промежутке (a; x_0)$(a;x_0)$
- f'(x)=0$f'(x)=0$ в точке x_0x_0
- f'(x)\gt 0$f'(x)>0$ на промежутке (x_0; b)$(x_0;b)$

Критическая точка

Точка, в которой производная функции равна нулю.

В критических точках касательная является горизонтальной линией, так как тангенс угла наклона касательной (значение производной в точке касания) равен нулю.

xx

yy

x₁x_1

x₂x_2

x₃x_3

f'(x)$f'(x)$

f(x)$f(x)$

Три типа критических точек:
x_1x_1 – точка локального минимума, является точкой экстремума;
x_2x_2 – точка перегиба, НЕ является точкой экстремума.
x_3x_3 – точка локального максимума, является точкой экстремума;

Как искать точки максимума и минимума функции

Xx yy Точка *Точка* минимума*минимума*

Точка*Точка* максимума*максимума*

Наименьшее*Наименьшее* значение*значение*

Наибольшее*Наибольшее* значение*значение*

y'(x)$y'(x)$ y(x)$y(x)$

Задачи на нахождение точек экстремума функции решаются по стандартной схеме в 33 шага.
Шаг 1. Найдите производную функции

- Запомните формулы производной элементарных функции и основные правила дифференцирования, чтобы найти производную.

$$y'(x)=(x^3-243x+19)'=3x^2-243.$$

Шаг 2. Найдите нули производной

- Решите полученное уравнение, чтобы найти нули производной.

$$3x^2-243=0 \,\,\,\,\Leftrightarrow \,\,\,\, x^2=81 \,\,\,\,\Leftrightarrow \,\,\,\, x_1=-9, \,\,\,\, x_2=9.$$

Шаг 3. Найдите точки экстремума

- Используйте метод интервалов, чтобы определить знаки производной;
- В точке минимума производная равна нулю и меняет знак с минуса на плюс, а в точке максимума – с плюса на минус.

Применим этот подход, чтобы решить следующую задачу:

Найдите точку максимума функции $y=x^3-243x+19$.

1) Найдем производную: $y'(x)=(x^3-243x+19)'=3x^2-243;$

2) Решим уравнение $y'(x)=0$: $3x^2-243=0 \,\,\,\,\Leftrightarrow \,\,\,\, x^2=81 \,\,\,\,\Leftrightarrow \,\,\,\, x_1=-9, \,\,\,\, x_2=9$

3) Производная положительная при $x\gt 9$ и $x\lt -9$ и отрицательная при $-9\lt x\lt 9.$ Поэтому $x=-9$ — точка максимума.

Как искать наибольшее и наименьшее значение функции

Для решения задачи на поиск наибольших и наименьших значений функции **необходимо**:

- Найти точки экстремума функции на отрезке (интервале).
- Найти значения в концах отрезка и выбрать наибольшее или наименьшее величину из значений в точках экстремума и в концах отрезка.

Во многих задачах помогает **теорема**:

Если на отрезке только одна точка экстремума, причем это точка минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции. Если это точка максимума, то в ней достигается наибольшее значение.

БУ.1.1. 1.04.20 математика

Тема: «Решение прикладных задач производной направленности»

А.Н.Колмогоров –Алгебра и начала анализа 10-11 классы

стр.158-166 на ср.166 №1-6

Методические рекомендации

Задания.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + \sqrt{x} - 7$, $f(x) = \sqrt{x^3} - 2x\sqrt{x} + \pi$,
2. $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $f(x) = \ln \cos x$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$, $f(x) = x + \frac{4}{x}$,
3. $f(x) = x^2(x+3)$, $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 - 3$, $f(x) = 2\sqrt{3}tgx - tg2x$.

3. Применение знаний при решении примеров и задач.

Сегодня на занятии мы вспомним задания на нахождение наибольшего, наименьшего значений функции на промежутке и применение этой темы для решения задач. На прошлом занятии мы записали алгоритм для этого. Повторим его (приглашается для ответа студент, а затем еще раз выводится на экран).

Нахождение наибольшего и наименьшего значений монотонной функции f(x) на отрезке (а;в) достигается на концах отрезка. Если же заданная функция не является монотонной, но известно, что она является непрерывной, то для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке применяется правило:

1. Найти критические точки функции.
2. Найти значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и на концах отрезка. Наибольшее и наименьшее значения из этих чисел и будут соответственно наибольшим и наименьшим значениями функции на отрезке.

Теперь решаем задачи.

Задача 1. Молодой предприниматель Михайлов Юрий в свете экономического кризиса решил выкупить нерентабельное провинциальное перерабатывающее предприятие и пригласил экономиста Гульдерова Германа помочь с расчетами по оптимизации расходов. Одна из задач поставленных перед Германом была следующая: найти, при каких условиях расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет наименьшим.

Решение.

Вспомним 3 этапа математического моделирования, применяемые при решении задач на оптимизацию (показ на экране):

- 1 этап. Составление математической модели.
- 2 этап. Работа с составленной моделью.
- 3 этап. Ответ на вопрос задачи.

1 этап. Составление математической модели.

Составление модели облегчается тем, что известна форма банки и оговорено, что она должна быть заданной емкости. Это существенно для составления модели. Существенным является также требование, чтобы расход жести на изготовление банки был минимальным. Это требование означает, что площадь полной поверхности банки, имеющей форму цилиндра, должна быть наименьшей; существенны и размеры банки. Несущественны для составления математической модели конкретное (численное) значение емкости банки и вид консервов (мясных, овощных), для которых банка предназначена.

Обозначив емкость банки через V см³, сформулируем задачу: Определить размеры цилиндра с объемом V см³ так, что бы площадь его полной поверхности была наименьшей.

Для решения задачи обозначим радиус основания цилиндра через x, а высоту его через h (все измерения в сантиметрах). Тогда объем цилиндра

$$V = \pi x^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi x^2}.$$

Полная поверхность цилиндра:

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{V}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x} = \frac{2\pi x^3 + 2V}{x}.$$

Итак, $S(x) = \dfrac{2\pi x^3 + 2V}{x}$.

Так как переменная x может принимать только положительные значения, решение задачи сводится к нахождению наименьшего значения S(x) на $(0;\infty)$.

2 этап. Работа с составленной моделью.

Найдем производную S´(x):

$$S'(x) = \left(\frac{\pi x^3 + 2V}{x}\right)' = \left(\frac{6\pi x^2 x - (2\pi x^3 + 2V)}{x^2}\right) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2}.$$

Для нахождения критических точек решим уравнение S´(x) = 0.

Корень уравнения: $x = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

При $x < 0 < \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ S´(x) < 0, а при $x > \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ S´(x) > 0.

Следовательно, в точке x = $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ S(x) имеет минимум.

X	$(0; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}})$	$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$	$(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}; \infty)$
S´	_	0	+
S	↘	min	↗

Следовательно, функция в этой точке достигает наименьшего значения.

Таким образом, площадь полной поверхности цилиндра, имеющего объем V, будет наименьшей при h = 2x = 2 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ = $\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$, т.е. когда цилиндр равносторонний.

3 этап. Ответ на вопрос задачи.

Наименьший расход жести на изготовление консервных банок цилиндрической формы заданной емкости будет достигнут при условии, что диаметр основания и высота банки равны между собой.

Полезно обратить внимание ребят на то, что в нашей стране выпускаются ежегодно сотни миллионов банок консервов в жестяной упаковке. Экономия 1% жести на изготовление каждой банки позволит за счет сэкономленного материала дополнительно изготовить несколько миллионов новых банок. Вместе с тем промышленность нередко выпускает консервы в жестяной таре, не обеспечивая наименьший расход материала на изготовление банки. Это обусловлено рядом причин: стремлением минимизации отходов при изготовлении банок, соображениями торговой эстетики. Возможностями транспортировки и т.д.

Задача 2. Фрагмент рассказа Л.Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно» о крестьянине Пахоме, покупавшем землю у башкир.

- А цена какая будет? – говорит Пахом.

- Цена у нас одна: 1000 рублей за день.

Не понял Пахом.

- Какая же это мера – день? Сколько в ней десятин будет?

- Мы этого, – говорит, - не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь за день , то твое, а цена 1000 рублей.

Удивился Пахом.

- Да ведь это, - говорит, - в день обойти земли много будет.

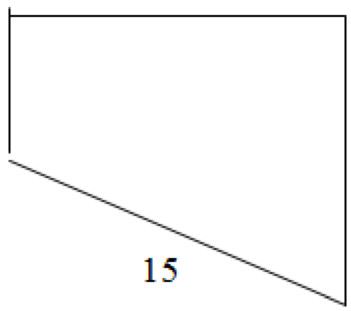
Засмеялся старшина.

- Вся твоя, - говорит. – Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

Фигура, которая получилась у Пахома, изображена на рисунке(на экране).

13

2



10

15

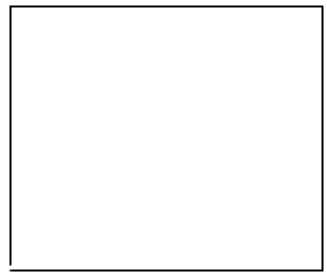
(прямоугольная трапеция)

Обежал он за день, например, прямоугольную трапецию периметром 40 км. С площадью S = 78 км².

Проверим, наибольшую ли площадь при этом получил бы Пахом (с учетом того, что участки обычно имеют форму прямоугольника)?

P = 40 км. a – первая сторона, 20 – a – вторая сторона.

a



b

$S = a\,(20 - a) = -a^2 + 20a.$

$S' = -2a + 20 = 0,\ a = 10.$

$S'' = -2 < 0$

Следовательно, наибольший четырехугольник – квадрат, т.е. наибольшая площадь – 100 м².

Можно сделать вывод, что пахом вполне мог получить земли больше с меньшими усилиями.

Задача 3. Гарданов Марсель решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал другу юности Сабирову Денису шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 Х 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

Решение.

Обозначим через x длину стороны вырезаемого квадрата. Легко видеть, что

$0<x<25.$

Объем при этом у коробки:

$V = x\,(80\text{-}x)\,(50 – 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$

$V' = 12x^2 - 520x + 4000 = 0,$

$x_1 = 100:3 = 33\frac{1}{3}$, $x_2 = 10$.

x_1 - посторонний корень по смыслу задачи.

$x_2 = 10$ – единственное решение – высота, 80 – 20 = 60 – длина, 50 – 20 = 30 – ширина.

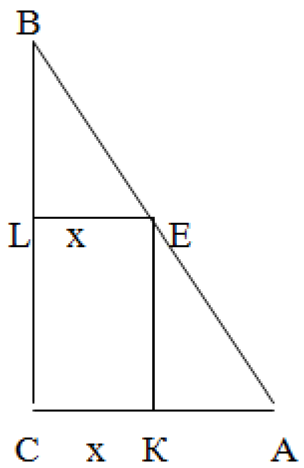
$V = 10 \cdot 60 \cdot 30 = 18000$(см³).

Задачи для самостоятельного решения.

4. Требуется огородить прямоугольный участок земли площадью 294 м² и разделить этот земельный участок забором на 2 равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора окажется минимальной? (14 м, 21 м).

Задача 4. Из куска железа в форме прямоугольного треугольника с катетами 2 м и 4м необходимо вырезать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными катетам треугольника.

Решение.



$\Delta ABC \sim \Delta BLE$,

$$\frac{AC}{LE} = \frac{BC}{BL},$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{4 - LC} \Rightarrow LC = 4 - 2x,$$

$S = x\,(4 - 2x) = 4x - 2x^2$,

$S' = 4 - 4x = 0$, $x = 1$,

$S'' = -4 < 0$ – т.max

$S = 2 \cdot 1 = 2$(см²) – наибольшая площадь.

Соответствующие стороны прямоугольника: 1 см, 2 см.

Задача 5. Разрежьте отрезок длиной 18 см на две части так, чтобы приняв их за катеты, получить прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой.

(9 см, 9 см).

Задача 6. Окно имеет форму прямоугольника, периметр которого равен 8 м. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

(2 м, 2 м).

БУ.1.1 2.04.20. математика

Тема «Практическая работа по вычислению всех видов производных»

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА. «Вычисление производных алгебраических функций»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление производных алгебраических

функций».

2. Закрепить и систематизировать знания по теме.

3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности уч-ся.

ОБОРУДОВАНИЕ: инструкционно-технологические карты, таблица производных элементарных

функций; микрокалькуляторы.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Сформулируйте определение функции.

б) Сформулируйте правила вычисления производных алгебраических функций.

в) В чем состоит механический смысл производной?

г) Тело движется по прямой согласно закону x(t). Запишите формулы для нахождения скорости и

ускорения тела в момент времени t.

4. Оформить отчет о работе.

1) $\left(2x^4 - \sin x + 2^x - \log_3 x + e^x - \ln x\right)'$

2) $\left(x^2 \cos x\right)'$

3) $\left(\dfrac{x^3+1}{x^2+1}\right)'$

4) $\left(e^{2x-1}\right)'$

5) $\left(\sqrt[5]{(4x+3)^4}\right)'$

ВАРИАНТ1

№ 1 Найдите производную функции:

6) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2}\right)'$

7) $\left(4\cos(3x-5) + \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}\right)'$

8) $\left(e^{5x+1}\cdot\sqrt{5x}\right)'$

№ 2. Найти экстремумы функции:

1) $y=7x^2-56x+8$

2) $y=4x^3+6x^2$

3) $y=x^4-\frac{1}{2}x^2$

4) $y=-\frac{1}{4}x^4+x^2$

II ВАРИАНТ

№ 2 Найдите производную функции:

1) $\left(3x^5+\cos x+3^x+\log_4 x-e^x+\ln x\right)'$

2) $\left(x^3\ln x\right)'$

3) $\left(\frac{x^4-1}{x^3+1}\right)'$

4) $\left(\log_2(3x+1)\right)'$

5) $\left(\sqrt[4]{(5x-2)^3}\right)'$

6) $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{x^2}\right)'$

7) $\left(4\cos(3x-5)+\frac{1}{\sqrt{2x-3}}\right)'$

8) $\left(e^{5x+1}\cdot\sqrt{5x}\right)'$

№ 2. Найти экстремумы функции:

1) $y=8x^2-48x+5$

2) $y=-2x^3+3x^2$

3) $y=\frac{1}{3}x^3-x$

4) $y=x^4-2x^2-3$

Астрономия в гр ЭМ1.1, ИС1.1, ОП1.1, БУ1.1, во всех группах

Тема: Физическая природа звезд (цвет, температура, спектры и химический состав). Интернет.

Составить отчет о проделанной работе, выполнить задания по математике в рабочих тетрадях