Случайные величины. Дискретная случайная величина. Математическое ожидание

Второй раздел по теории вероятностей посвящён ***случайным величинам***, которые незримо сопровождали нас буквально в каждой статье по теме. И настал момент чётко сформулировать, что же это такое:

Случайной называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через X, Y, Z *****, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, x_1, x_2, x_3.

***** *Иногда используют U, V, W, а также греческие буквы*

Пример встретился нам на первом же уроке по теории вероятностей, где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

X – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина X может принять одно из следующий значений:

$x_1 = 1,\quad x_2 = 2,\quad x_3 = 3,\quad x_4 = 4,\quad x_5 = 5,\quad x_6 = 6$.

Пример из статьи о Статистическом определении вероятности:

Y – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

$y_0 = 0,\quad y_1 = 1,\quad y_2 = 2,\quad y_3 = 3,\quad \ldots, y_9 = 9$, либо $y_{10} = 10$ мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

Z – дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро речь идёт о множестве действительных чисел, то случайная величина Z может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы**:

1) Дискретная *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

…нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем **основы алгебры**!

2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Примечание*: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – **непрерывную**.

Поехали:

Закон распределения дискретной случайной величины

– это *соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Довольно часто встречается термин ***ряд*** *распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная величина X *обязательно* примет **одно из значений** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то соответствующие события образуют **полную группу** и сумма вероятностей их наступления равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

или, если записать свёрнуто:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:

X	1	2	3	4	5	6
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:

U	-5	$2{,}5$	10
	$0{,}5$	p_2	$0{,}1$

Найти p_2

…наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над **теорией поля**.

Решение: так как случайная величина U может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:
$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Разоблачаем «партизана»:
$0{,}5 + p_2 + 0{,}1 = 1$
$p_2 + 0{,}6 = 1 \Rightarrow p_2 = 1 - 0{,}6$ – таким образом, вероятность выигрыша $u_2 = 2{,}5$ условных единиц составляет 0,4.

Контроль: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1$, в чём и требовалось убедиться.

Ответ: $p_2 = 0{,}4$

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют **классическое определение вероятности**, **теоремы умножения / сложения вероятностей событий** и другие фишки **тервера**:

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины V – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

Решение: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно $v_1 = 0$ рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по классическому определению:

$p_1 = \frac{38}{50} = 0{,}76$ – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша $v_2 = 100$ рублей составляет:

$p_2 = \frac{10}{50} = 0{,}2$

И для $v_3 = 1000$:

$p_3 = \frac{2}{50} = 0{,}04$

Проверка: $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}76 + 0{,}2 + 0{,}04 = 1$ – и это особенно приятный момент таких заданий!

Ответ: искомый закон распределения выигрыша:

V	0	100	1000
	0,76	0,2	0,04

Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна $p = 0{,}7$. Составить закон распределения случайной величины W – количества попаданий после 2 выстрелов.

…я знал, что вы по нему соскучились :) Вспоминаем теоремы умножения и сложения. Решение и ответ в конце урока.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда математическое ожидание $M(X)$ данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$$

или в свёрнутом виде:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины X – количества выпавших на игральном кубике очков:

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=3{,}5$$ очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близкО к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте я уже подробно рассказывал на уроке о статистической вероятности.

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:

U	-5	$2{,}5$	10
	$0{,}5$	$0{,}4$	$0{,}1$

Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? …у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

$$M(U)=u_1p_1+u_2p_2+u_3p_3=-5\cdot 0{,}5+2{,}5\cdot 0{,}4+10\cdot 0{,}1=-2{,}5+1+1=-0{,}5$$, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам!

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только ради развлечения.

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Творческое задание для самостоятельного исследования:

Пример 4

Мистер Х играет в европейскую рулетку по следующей системе: постоянно ставит 100 рублей на «красное». Составить закон распределения случайной величины X – его выигрыша. Вычислить математическое ожидание выигрыша и округлить его до копеек. Сколько *в среднем* проигрывает игрок с каждой поставленной сотни?

Справка*: европейская рулетка содержит 18 красных, 18 чёрных и 1 зелёный сектор («зеро»). В случае выпадения «красного» игроку выплачивается удвоенная ставка, в противном случае она уходит в доход казино*

Существует много других систем игры в рулетку, для которых можно составить свои таблицы вероятностей. Но это тот случай, когда нам не нужны никакие законы распределения и таблицы, ибо доподлинно установлено, что математическое ожидание игрока будет точно таким же. От системы к системе меняется лишь дисперсия, о которой мы узнаем во 2-й части урока.

Но прежде будет полезно размять пальцы на клавишах калькулятора:

Пример 5

Случайная величина X задана своим законом распределения вероятностей:

X	-1	0	x_3	5
	$0,3$	$0,2$	$0,1$	$0,4$

Найти x_3, если известно, что $M(X)=1,9$. Выполнить проверку.

Есть?

Тогда переходим к изучению дисперсии дискретной случайной величины, и по возможности, **ПРЯМО СЕЙЧАС!!** – чтобы не потерять нить темы.

Решения и ответы:

Пример 3. ***Решение****: по условию* $p=0,7$ *– вероятность попадания в мишень. Тогда:*
$q=1-p=1-0,7=0,3$ *– вероятность промаха.*

Составим W *– закон распределения попаданий при двух выстрелах:*

$w_1=0$ *– ни одного попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*
$p_1=qq=0,3\cdot 0,3=0,09$

$w_2=1$ *– одно попадание. По теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий:*
$p_2=pq+qp=0,7\cdot 0,3+0,3\cdot 0,7=0,21+0,21=0,42$

$w_3=2$ *– два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:*
$p_3=pp=0,7\cdot 0,7=0,49$

Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1

Ответ*:*

W	0	1	2
	$0,09$	$0,42$	$0,49$

Примечание*: можно было использовать обозначения* $w_0, w_1, w_2, p_0, p_1, p_2$ *– это не принципиально.*

Пример 4. ***Решение****: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий* *вид:*

X	-100	100
	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Вычислим математическое ожидание:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 = -100 \cdot \frac{19}{37} + 100 \cdot \frac{18}{37} = -\frac{1900}{37} + \frac{1800}{37} = -\frac{100}{37} \approx -2{,}70$$

Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

Пример 5. ***Решение****: по определению математического ожидания:*

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

$$1{,}9 = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + x_3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}4$$

поменяем части местами и проведём упрощения:

$$-0{,}3 + 0 + 0{,}1x_3 + 2 = 1{,}9$$

$$0{,}1x_3 + 1{,}7 = 1{,}9$$

$$0{,}1x_3 = 1{,}9 - 1{,}7$$

$$0{,}1x_3 = 0{,}2$$

таким образом:

$$x_3 = \frac{0{,}2}{0{,}1} = \frac{2}{1} = 2$$

Выполним проверку:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4 = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}5 =$$

$= -0{,}3 + 0 + 0{,}2 + 2 = 1{,}9$*, что и требовалось проверить.*

Ответ*:* $x_3 = 2$