Задание для студентов гр. ТП 1 на период с 20.04.2020 – 26.04.2020 (4 часа – 2 пары)

Дисциплина «Математика»
Преподаватель Токарская М.С.
Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru
Тел. 89147174421 – WhatsApp – если есть вопросы.

Все задания отправлять на почту!!!!!

Тема: «Повторение понятия функция. Способы задания функций»

Задание: лекцию законспектировать, примеры выписать в тетрадь, выполнить самостоятельную работу в конце лекции, составить таблицу (в конце, по желанию на доп.оценку).

Учебник:

https://ru.calameo.com/read/0007452692fa11c1f518e - Башмаков М.И., Математика (Начальное и среднее профессиональное образование)

Видеоуроки:

1. https://infourok.ru/videouroki/1174 - определение и способы задания числовых функций
2. https://infourok.ru/videouroki/1185 - область определения и область значения
3. https://infourok.ru/videouroki/1196 - свойства функций

Лекция.

Сегодня на уроке мы с вами повторим понятие функции, способы ее задания, а так же вспомним, какие функции мы уже изучили.

Определение 1: Правило (закон) соответствия между множествами X и Y, по которому для каждого элемента из множества X можно найти один и только один элемент из множества Y, называется **функцией**.

Функция считается заданной, если:

- задана область определения функции X ;
- задана область значений функции Y ;
- известно правило (закон) соответствия, причем такое, что для каждого значения аргумента может быть найдено только одно значение функции. ***Это требование однозначности функции является обязательным.***

Определение 2: Множество X (читаем - X большое) всех допустимых действительных значений аргументах, при которых функция y = f (x) определена, называется **областью определения функции и обозначается *D(f)*** .

Определение 3: Множество Y (читаем - У большое) всех действительных значений y, которые принимает функция, называется **областью значений функции и обозначается *E(f)***.

Обратите внимание: Область определения и множество значений – это не свойства функции, а ее неотъемлемые атрибуты

П р и м е р ы . $y = x^3 + 1$; область определения функции: $-\infty < x < +\infty$;
область значений функции: $-\infty < y < +\infty$.

$y = \sqrt{x-5}$; область определения функции: $x \geq 5$;
область значений функции: $y \geq 0$.

$y = \dfrac{\sin^2 x}{|x-4|}$; область определения функции: $x \neq 4$;
область значений функции: $y \geq 0$.

В математике имеется достаточно небольшое количество элементарных функций, область определения которых ограничена. Все остальные "сложные" функции - это всего лишь их сочетания и комбинации.

1. Дробная функция - ограничение на знаменатель.

$$\frac{1}{f(x)} \rightarrow \quad f(x) \neq 0$$

2. Корень четной степени - ограничение на подкоренное выражение.

$$\sqrt[2n]{f(x)} \rightarrow \quad f(x) \geq 0$$

3. Логарифмы - ограничение на основание логарифма и подлогарифмическое выражение.

$$\log_{h(x)} f(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ h(x) > 0 \\ h(x) \neq 1 \end{cases}$$

Пример 1. Найдите область определения функции $y = \frac{3}{(x+5)(x^2-5x-6)}$

Решение. Область определения задается неравенством

$$(x+5)(x^2-5x-6) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \neq -1 \\ x \neq 6 \end{cases}, \text{так как } x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ при } x = -1, x = 6$$

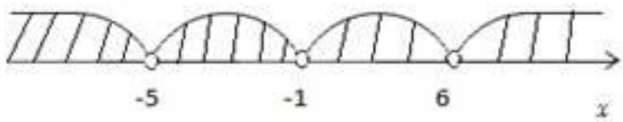


Рис. 1. Область определения функции

Ответ: $\boldsymbol{D(f) = (-\infty; -5) \cup (-5; -1) \cup (-1; 6) \cup (6; +\infty)}$

Пример 2. Найдите область определения и область значения функции $y = \sqrt{16 - x^2}$

Решение.

1. Область определения задается неравенством:

$$16 - x^2 \geq 0 \iff (4 - x)(4 + x) \geq 0 \iff -4 \leq x \leq 4$$

2. Под корнем имеем функцию $u(x) = \sqrt{16 - x^2}, x \in [-4; 4]$

Область значения этой функции $u(x) \in [0; 16]$

Поскольку $y = \sqrt{u(x)}$ и $u(x) \in [0; 16], y \epsilon [0; 4]$

Ответ: $E(f) \epsilon [0; 4]$

Пример 3.

Задание Найти область определения функции $y = \log_{\pi}(2x - 4)$

Решение Область определения заданной функции задается следующим неравенством:

$$2x - 4 > 0$$

Решим это линейное неравенство:

$$2x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in (2;\ +\infty)$$

Таким образом, $D(y) : x \in (2;\ +\infty)$.

Ответ $D(y) : x \in (2;\ +\infty)$

Пример 4.

Задание Найти область определения функции $y = \log_2((x - 1)(x + 5))$

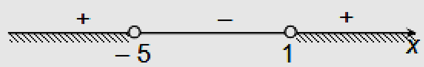
Решение Логарифм определен, если подлогарифмическая функция является положительной, то есть искомая область определения

$$D(y) : (x - 1)(x + 5) > 0$$

Решим полученное неравенство $(x - 1)(x + 5) > 0$ методом интервалов. Для этого находим нули каждого из сомножителей:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1,$$
$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5,$$

наносим их на координатную прямую и определяем знак неравенства на каждом из полученных промежутков:



Поскольку решаем неравенство со знаком «>», то оставляем промежутки со знаком «+», то есть

$$D(y) : x \in (-\infty;\ -5) \bigcup (1;\ +\infty)$$

Ответ $x \in (-\infty;\ -5) \bigcup (1;\ +\infty)$

Рассмотрим некоторые способы задания функций.

1. Табличный способ. Довольно распространенный, заключается в задании таблицы отдельных значений аргумента и соответствующих им значений функции. Такой способ задания функции применяется в том случае, когда область определения функции является дискретным конечным множеством.

x	1	2	...	n	...
y	3	6	...	$3n$	...

2. Графический способ.

Определение 4: Графиком функции y = f(x) называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Графический способ задания функции не всегда дает возможность точно определить численные значения аргумента. Однако он имеет большое преимущество перед другими способами - наглядность. В технике и физике часто пользуются графическим способом задания функции, причем график бывает единственно доступным для этого способом.

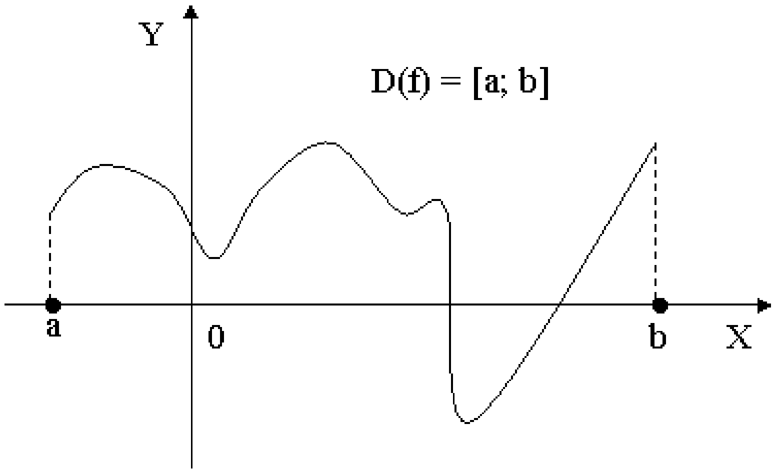


Рис 1.

3. Аналитический способ. Чаще всего закон, устанавливающий связь между аргументом и функцией, задается посредством формул. Такой способ задания функции называется аналитическим. Этот способ дает возможность по каждому численному значению аргумента x найти соответствующее ему численное значение функции y точно или с некоторой точностью.

Например: $y = x^2 + 3, y = \frac{2-x}{x+5}, y = \log_3(x^3 - 3x + 1), y = \cos x,\ y = \frac{1}{sin^2 x}$

4. Словесный способ. Этот способ состоит в том, что функциональная зависимость выражается словами.

Пример 1: функция E(x) — целая часть числа x. Вообще через E(x) = [x] обозначают наибольшее из целых чисел, которое не превышает x. Иными словами, если x = r + q, где r — целое число (может быть и отрицательным) и q принадлежит интервалу [0; 1), то [x] = r. Функция E(x) = [x] постоянна на промежутке [r; r+1) и на нем [x] = r.

Пример 2: функция y = {x} — дробная часть числа. Точнее y ={x} = x - [x], где [x] — целая часть числа x. Эта функция определена для всех x. Если x — произвольное число, то представив его в виде x = r + q (r = [x]), где r — целое число и q лежит в интервале [0; 1), получим {x} = r + q - r=q

Основными недостатками словесного способа задания функции являются невозможность вычисления значений функции при произвольном значении аргумента и отсутствие наглядности.

Главное преимущество же заключается в возможности задания тех функций, которые не удается выразить аналитически.

Основные свойства функции

1. *Четность и нечетность*

Функция называется **четной (рис.5)**, если:

– область определения функции симметрична относительно нуля;
– для любого x из области определения f(-x) = f(x).

График четной функции симметричен относительно оси 0y

Функция называется **нечетной (рис.6)**, если

– область определения функции симметрична относительно нуля;
– для любого x из области определения f(-x) = –f(x).

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если ни одно из условий f(-x) = f(x). или f(-x) = –f(x) не выполняется, то говорят, что функция не является **ни четной, ни нечетной** (или **функцией общего вида**)

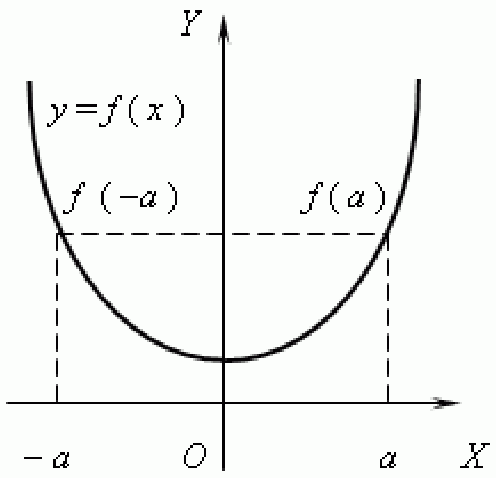


Рис. 5

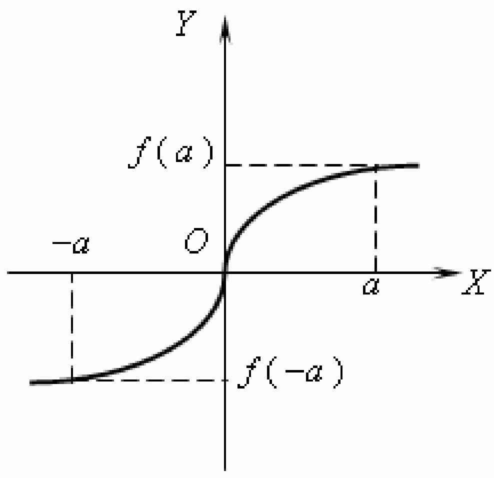


Рис. 6

Задание Используя определение исследовать на четность и нечетность следующие функции

$$1)\ f_1(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6;\ 2)\ f_2(x) = 8x^3 - 7x;\ 3)\ f_3(x) = x^4 - 4x + 5$$

Решение 1) Рассмотрим значение функции $f_1(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6$ в точке $(-x)$:

$$f_1(-x) = 2 \cdot (-x)^4 - 3 \cdot (-x)^2 + 6 = 2x^4 - 3x^2 + 6 = f_1(x)$$

Для заданной функции выполняется условие $f_1(-x) = f_1(x)$, следовательно, она четная.

2) Найдем значение функции $f_2(x) = 8x^3 - 7x$ в точке $(-x)$:

$$f_2(-x) = 8 \cdot (-x)^3 - 7 \cdot (-x) = -8x^3 + 7x = -\left(8x^3 - 7x\right) = -f_2(x)$$

Для этой функции выполняется условие $f_2(-x) = -f_2(x)$, следовательно, она является нечетной.

3) Найдем значение функции $f_3(x) = x^4 - 4x + 5$ в точке $(-x)$:

$$f_3(-x) = (-x)^4 - 4 \cdot (-x) + 5 = x^4 + 4x + 5$$

Таким образом, $f_3(-x) \neq f_3(x)$; $f_3(-x) \neq -f_3(x)$, значит, функция $f_3(x) = x^4 - 4x + 5$ не является ни четной, ни нечетной.

Ответ 1) $f_1(x) = 2x^4 - 3x^2 + 6$ — четная;

2) $f_2(x) = 8x^3 - 7x$ — нечетная;

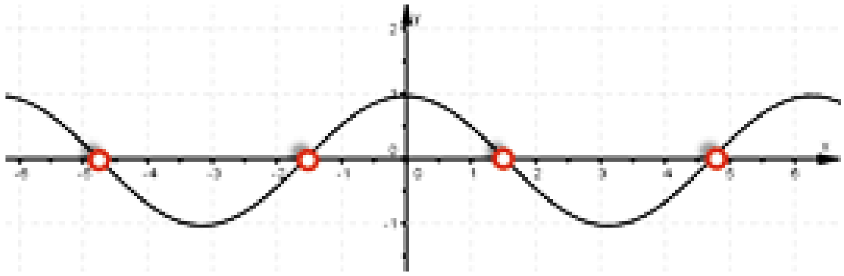
3) $f_3(x) = x^4 - 4x + 5$ — ни четная, ни нечетная.

2. *Периодичность.*

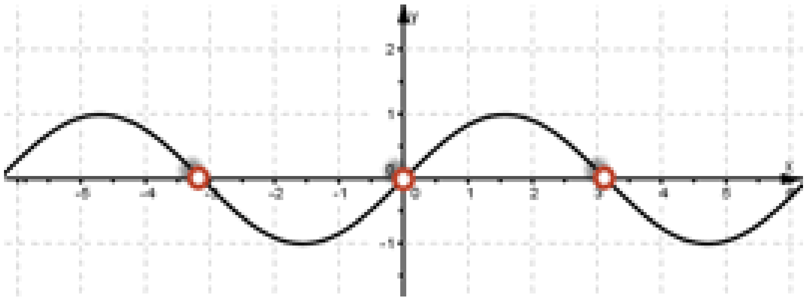
Определение 5: Функция f(x) называется **периодической** с периодом T, если для любого x из области определения f(x) = f(x+T) = f(x-T).

График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.

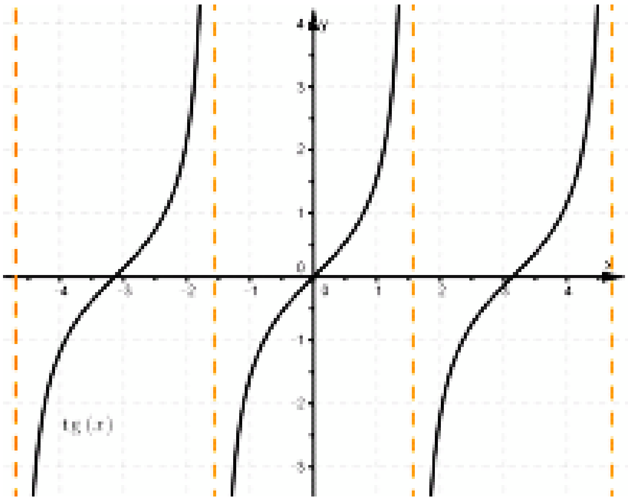
Например: $\boldsymbol{y = \cos x}$



$\boldsymbol{y = \sin x}$



$\boldsymbol{y = tg\, x}$

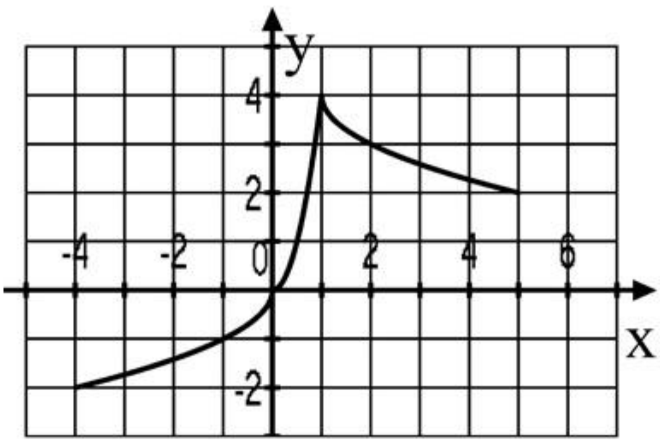


3. Монотонность (возрастание, убывание).

Определение 6: Функция f(x) **возрастает** на множестве P , если для любых x1 и x2 из этого множества, таких, что x1 < x2 выполнено неравенство f(x1)< f(x2).

Определение 7: Функция f(x) **убывает** на множестве P , если для любых x1 и x2 из этого множества, таких, что x1 < x2 выполнено неравенство f(x1) > f(x2).

Пример: определить по графику промежутки возрастания и убывания функции.



При $x \in (-4; 1)$функция возрастает, а при $x \in\ (1; 5) -$ убывает

4. *Экстремумы*

Определение 8: Точка Xmax называется **точкой максимума** функции f(x) , если для всех x из некоторой окрестности Xmax , выполнено неравенство f(x)< f(Xmax).

Значение Ymax = f(Xmax) называется **максимумом** этой функции.

Xmax – точка максимума, Ymax – максимум

Определение 9: Точка Xmin называется **точкой минимума** функции f(x) , если для всех x из некоторой окрестности Xmin , выполнено неравенство f(x) f(Xmin).

Значение Ymin=f(Xmin) называется **минимумом** этой функции.

Xmin – точка минимума, Ymin – минимум

Xmin, Xmax – точки экстремума

Ymin, Ymax – экстремумы.

5. *Нули функции*

Определение 10: ***Нулем функции y = f(x)*** называется такое значение аргумента x, при котором функция обращается в нуль: f(x) = 0.

Пример: найти нули функции

a) $y = 2x + 3$

$$y = 0, \text{т. е. } 2x + 3 = 0, 2x = -3, x = -1{,}5$$

$$\text{Ответ: при } x = -1{,}5 \ y = 0 \text{ или } x = -1{,}5 - \text{нуль функции}$$

b) $y = \frac{x^2-4}{2x+3}$

вспомним, что дробь равна нулю только при условии, что ее числитель нулю равен, а знаменатель нет

тогда: $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 2x + 3 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2 \\ x \neq -1{,}5 \end{cases}$

Ответ: x =2, x=-2 – нули функции

c) $y = \log_2(5 - 4x)$

$$\log_2(5 - 4x) = 0$$
$$5 - 4x = 2^0$$
$$5 - 4x = 1$$
$$-4x = -4$$
$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$ *– нуль функции*

6. *Ограниченность.*

Определение 11: Функция называется **ограниченной**, если существует такое положительное число M, что $|f(x)| \leq M$ для всех значений x .

Если такого числа не существует, то функция – неограниченная: на рисунке 3 – функция ограниченна, на рисунке 4 – нет.

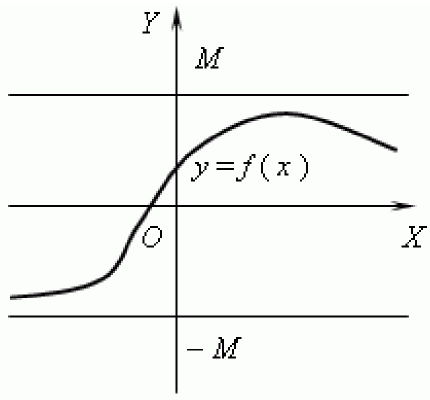


Рис. 3

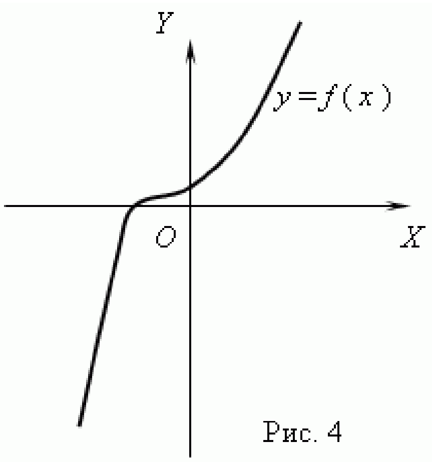


Рис. 4

Самостоятельная работа.

1. Построить графики функций:

Уровень А:

1) $y = 3x + 1$
2) $y = \frac{2}{x}$
3) $y = x^2 + 1$

Уровень В:

1) $y = \sqrt{x}$
2) $y = -\frac{2}{x}$
3) $y = -x^2 + 1$

Уровень С:

$$y = \frac{x}{x+1}$$

$$y = x^2 + x$$

2. Вычислить значение функции при указанном значении переменной

A

1) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x = 1$, $x = \dfrac{t}{2}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-5}$, $x = -3$, $x = t + 1$;

B

1) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x = \dfrac{3}{5}$, $x = \dfrac{1}{t}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-5}$, $x = 0{,}25$, $x = \dfrac{t}{t+1}$;

C

1) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{t-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-5}$, $x = 2{,}5$, $x = \dfrac{t-3}{2t-5}$;

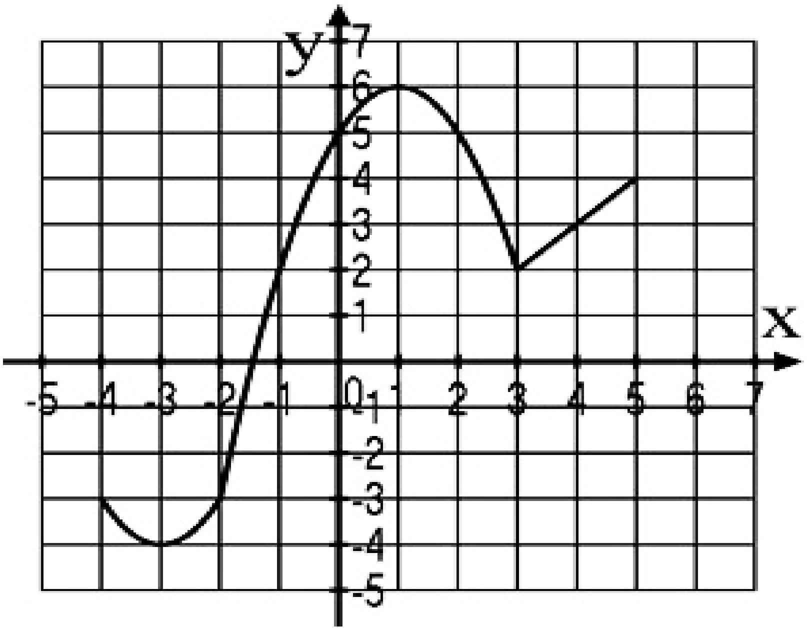
3. Уровень В - С: По графику функции определить:

a. Область определения
b. Нули функции
c. Промежутки знакопостоянства
d. Промежутки возрастания и убывания

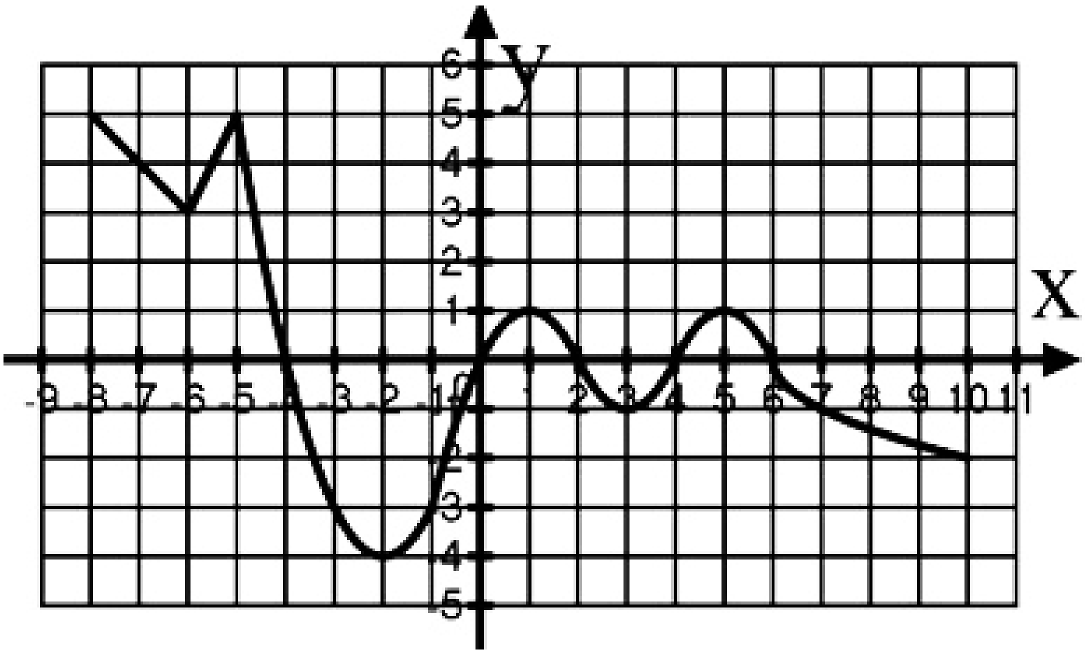
e. Наибольшее и наименьшее значение функции

f. Область изменения (значения)

Уровень В



Уровень С



Дополнительно (по желанию)

Заполнить таблицу «Элементарные функции» (большая, можно на А4)

Вид функции	Линейная (общий случай)	Прямая пропорциональность	Обратная пропорциональность	Квадратичная	Степенная (четная степень)	Степенная (нечетная степень)	Логарифмическая	Показательная
Формула								
График								
Область определения область значения								
Нули функции (если есть)								
Промежутки возрастания								
Промежутки убывания								
Особенности функции (особые точки, ограничения и т.д.)								