Задание для студентов гр. ТП 1 на период с 27.04.2020 – 30.04.2020 (4 часа – 2 пары)

Дисциплина «Математика»
Преподаватель Токарская М.С.
Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru
Тел. 89147174421 – WhatsApp – если есть вопросы.

Все задания отправлять на почту!!!!!

Уважаемые студенты!
Прошу вас отнестись со всей серьезностью к новой теме!
Не игнорируете ссылки, которые вам будут даны!!!
Внимательно и вдумчиво прочтите лекцию!!! И только после этого приступайте к написанию конспекта!!!

Учебники:

1. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf

- учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. **Гл.2 §4 п.12-13, 15**

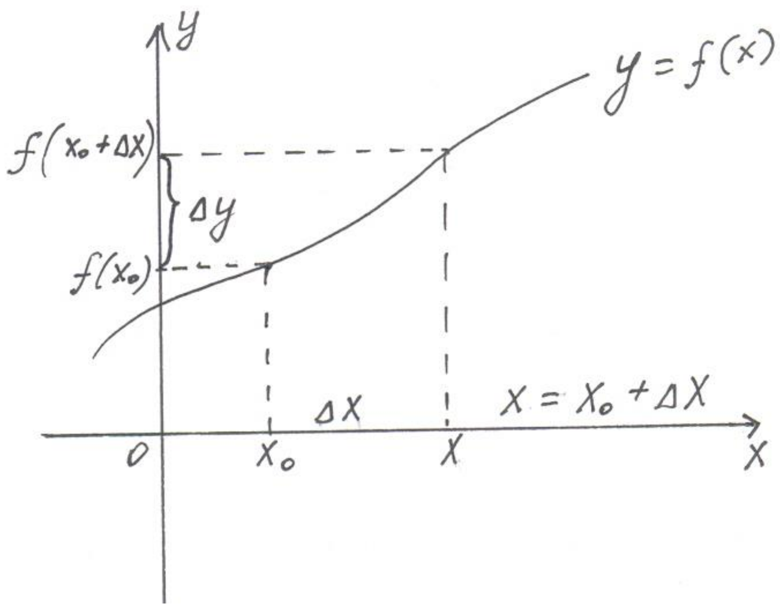
2. https://ru.calameo.com/read/0007452692fa11c1f518e - Башмаков М.И., Математика (Начальное и среднее профессиональное образование) – **Гл.9, занятия 1-5**

3. http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html - Понятие производной, Александр Емелин, 2010-2020.

Тема 1. Приращение функции

Пусть нам дана какая- то функция y=f(x).

Проведем произвольную кривую линию и будем считать, что это график нашей функции.



Возьмем на оси OX первоначальное значение аргумент обозначим его $\mathbf{X_0}$.

Найдем графически соответствующее ему значение функции $\mathbf{y_0= f (x_0)}$.

Возьмем на оси OX новое значение аргумента, обозначим его **X.**

Разность между новым

значением аргумента x и первоначальным x_0 – это и есть приращение аргумента Δx (дельта x).

Определение. Разность между новым значением аргумента X и первоначальным X_0 называются **приращение аргумента**

Обозначается: $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента (дельта икс равно икс минус икс нулевое).

Из этого равенства следует, что

$$x = x_0 + \Delta x$$

Найдем графически значение функции в точке x, то есть в точке $x_0 + \Delta x$.

Определение. Разность между новым значением функции и первоначальным называется **приращением функции.**

Записывается так: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$f(x_0 + \Delta x)$ – новое значение функции (эф от икс нулевое плюс дельта икс).
$f(x_0)$ – первоначальное значение функции.

Δf – приращение к функции (дельта эф).

Пример №1. Дано: $f(x) = -\frac{2}{x}$; $X_0 = -2$; $\Delta X = 0.1$

Найти приращение функции f в точке X_0, т.е. Δf.

Решение:

1. Формула $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
2. $X_0 + \Delta X = -2 + 0.1 = -1.9$
3. $f(x_0 + \Delta x) = f(-1.9) = \frac{-2}{-1{,}9} = \frac{2}{1{,}9} = \frac{20}{19} = 1\frac{1}{19}$
4. $f(x_0) = f(-2) = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} = 1$
5. $\Delta f = 1\frac{1}{19} - 1 = \frac{1}{19}$;

Ответ: $\frac{1}{19}$;

Пример №2. Дано: $f(x) = 3x + 1$; $x_0 = 5$; $\Delta x = 0.001$.

Найти: Δf

Решение:

1. формула $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
2. $x_0 + \Delta x = 5 + 0.001 = 5.001$;
3. $f(x_0 + \Delta x) = f(5.001) = 3 * 5.001 + 1 = 15.003 + 1 = 16.003$;
4. $f(x_0) = f(5) = 3 * 5 + 1 = 16$
5. $\Delta f = 16.003 - 16 = 0.003$ Ответ: 0,003.

Тема 2. Определение производной

Определение. **Аргумент** - это независимая переменная величина (x).
Определение. **Функция** - это зависимая переменная величина (y).

Пример.

Движение характеризуют переменные величины: t–время, S- расстояние, V-скорость.
t- время – это независимая величина, для математики – это аргумент.

S – расстояние- это зависимая переменная величина, для математики – это функция.
V- скорость при движении может быть переменной и может быть постоянной величиной.

Рассмотрим пример движения поезда.

Например, поезд идет из Владивостока в Москву. Мы решили определить его скорость. Сели в Красноярске, вышли в Ачинске и говорим, что расстояние 180км мы проехали за 3 часа.

Получается, что скорость поезда V= $\frac{180}{3} = 60(\frac{км}{час})$

Но на этом пути было несколько остановок, когда на прямолинейном участке пути она была и 80 и 90 км/час в близи вокзалов при остановке и при отправлении была разной: и 1и 2, и 5 и 10 (км/час). А мы говорим, что скорость поезда 60(км/час)

- ***О какой скорости идет речь?***

Мы говорим о средней скорости:

- То есть, чтобы найти среднюю скорость, надо отрезок пути разделить на соответствующий отрезок времени.

$$V_{ср.} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

- А теперь вспомним: какая скорость называется мгновенной?
- **Мгновенная скорость** – это средняя скорость за очень маленький промежуток времени, близкий к нулю.

т.е. $V_{ммг} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (в данном примере lim – предельное/крайнее значение отношения)

А теперь введем в формулу мгновенной скорости $V_{ммг} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ математические обозначения.
Т.к. расстояние S для математики - это функция, то обозначим отрезок пути вместо ΔS знаком Δy.
Т.к. время t для математики аргумент, то отрезок времени Δt обозначим за Δx.
- А чем же для математики является мгновенная скорость?

- Скорость для математики является производной и обозначается

$$y' \quad \text{или } f'(x)$$

(читается игрек штрих или эф штрих от икс).

- Итак, формулу мгновенной скорости мы теперь можем записать в математическом виде:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Это и есть формула производной.

Отрезок $\Delta x \to 0$ **можно считать точкой.**

Определение. **Производной функции f в точке x_0** называется отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Процесс отыскания производной называется - **дифференцированием**

На приращение функции $\Delta f = f(x_0) + \Delta x) - f(x_0)$,

Поэтому формулу производной можем записать в виде :

$$\boxed{f(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} \quad (*)$$

Т.к. формулу производной функции мы получим из формулы скорости, то можно сказать, что:

Физический смысл производной - это скорость изменения функции

Пример 1. Дана функция f(x)= 5x+3

Найти производную $f^{э}(x_0)$.

Решение.

Для решения данного упражнения будем пользоваться формулой(*).

$$f^{э}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x_0 + \Delta x) + 3 - (5x + 3)}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{5x_0} + 5\Delta x + \cancel{3} - \cancel{5x_0} - \cancel{3}}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$$

Ответ: $(5x+3)' = 5$

Пример 2. Дана функция f(x)=4-7x

Найти производную $f'(x_0)$

Решение

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 - 7(x_0 + \Delta x) - (4 - 7x_0)}{\Delta x} = = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{4} - \cancel{7x_0} - 7\Delta x - \cancel{4} + \cancel{7x_0}}{\Delta x} = \frac{-7\Delta x}{\Delta x} = -7$$

Ответ:

Пример 3. Дана функция f(x)=x. Найти производную $f'(x_0)$

Решение:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0}}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Ответ: $x' = 1$.

Получим формулу $x' = 1$- производная икса равна единице.

Пример 4. Дана функция f(x)=X^2. Найти производную $f'(x)$

Решение: Для решения этого упражнения нам будет нужна формула квадрат суммы двух чисел, имеющая вид: $(a+в)^2 = a^2+2aв+в^2$

$$f'(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x0+\Delta x)^2-x_0{}^2}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{x_0{}^2+2x_0*\Delta x+\Delta x^2-x_0{}^2}{\Delta x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x_0*\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0+0=2x_0$$

Т.к для обозначения первоначального значения аргумента мы сами ввели индекс нулевое, то можем записать ответ так: $(x^2)' = 2x$

Пример 5. Дана функция f (x)= x^3. Найти производную $f'(x_0)$

Решение: Для решения этого упражнения будем применять формулу куб суммы двух чисел, которая имеет вид:

$(a + в)^3 = a^3 + 3a^2 в + 3aв^2 + в^3$

$$f(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{x_0{}^3+3x_0{}^2*\Delta x+3x_0*\Delta x^2+\Delta x^3-x_0{}^3}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2*\Delta x+3x_0*\Delta x^2+\Delta x^3}{\Delta x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0*\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}(3^2{}_0+3x_0*\Delta x+\Delta x^2)=$$

$$=3x^2{}_0+3x:0+0=3x_0{}^2+0+0=3x_0{}^2$$

Рассмотрев последние два примера

$$(x^2)'=2x$$

$(x^3)'=3x^2$, можно по аналогии записать, что

$(x^4)'=4x^3$ или, например, $(x^{10})'=10x^9$.

Итак, можно сделать вывод, что производная степенной функции в общем виде записывается так:

$$\boxed{(x^n)'=n*x^{n-1}}$$

Пример 6. Дана функция f(x)=9

Найти производную $f'(x_0)$

Решение.

$$f(x_0)=9;\ f(x_0+\Delta x)=9$$

$$f^1(x_0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{9-9}{\Delta x}=\frac{0}{\Delta x}=0;$$

Ответ $:9^1=0$

Вместо 9 могло быть любое другое постоянное число, обозначим буквой С [це] (константа).

Получили формулу $C'=0$ - производная постоянной величины равна нулю.

Пользуясь этими формулами и вспомогательными формулами действий над степенями из школьного курса, а именно: $\boldsymbol{a^{-n}=\frac{1}{a^n}},\ \boldsymbol{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}}.$

выведем формулы для нахождения производных функций $f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ и $f(x)=\sqrt{x}$

1) $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=\left(x^{-n}\right)'=-n*x^{-n-1}=-n*\frac{1}{x^{n+1}}=-\frac{n}{x^{n+1}}$

Получили формулу $\left(\dfrac{1}{x^n}\right)'=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$ (1)

Пример. 1) $\left(\dfrac{1}{x^9}\right)^1=-\dfrac{9}{x^{10}}$

2) $\left(\dfrac{1}{x^{15}}\right)^1=-\dfrac{15}{x^{16}}$

из формулы (1) следует формула $\left(\dfrac{1}{x}\right)^1=-\dfrac{1}{x^2}$

Найдем производную функции f(x)= $\sqrt{x}$

Будем использовать формулы:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\quad \sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}\quad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad \left(x^n\right)'=nx^{n-1}$$

Итак, получили новую формулу: производная корня квадратного имеет вид

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Упражнения

http://mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html - как вычислять производные

Найти производную функции:

1. $\left(4x^8 + 2x^5 + 0{,}125 - 10\sqrt{x}\right)' = 4 \cdot 8x^{8-1} + 2 \cdot 5x^{5-1} + 0 - 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 32x^7 + 10x^4 - \frac{5}{\sqrt{x}}$ (сократили 10 и 2)

самостоятельно:

2. $5x^3 + 2x^7 + 8x^{10} - 3x + 9$
3. $10x^{12} + \frac{2}{x^5} + 2\sqrt{x}$
4. $2x^{15} + 3x^6 + x - 5$

Все формулы дифференцирования запишем в таблицу (выучить!!!!!)

1. $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$
2. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$
3. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$
4. $\left(e^x\right)' = e^x$
5. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
10. $(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
11. $(\mathrm{ctg}\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $(\mathrm{arcctg}\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$