Задание для студентов гр. ТП 1 на период с 06.05 – 15.05.2020 (8 пар – 16 часов)

Дисциплина «Математика»
Преподаватель Токарская М.С.
Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru
Тел. 89147174421 – WhatsApp – если есть вопросы.
Все задания отправлять на почту!!!!!

Учебники:

1. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf

- учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. **Гл.2 §4 п.12-13, 15**

2. https://ru.calameo.com/read/0007452692fa11c1f518e - Башмаков М.И., Математика (Начальное и среднее профессиональное образование) – **Гл.9, занятия 1-5**

3. http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html - Понятие производной, Александр Емелин, 2010-2020.

Тема урока: Правила вычисления производных

Ход урока.

1. **Актуализация знаний.**

Повторите таблицу производных (откройте ее и держите перед глазами)

Проверьте примеры из прошлого урока:

1) $(5x^3 + 2x^7 + 8x^{10} - 3x + 9)' = 5 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 7x^{7-1} + 8 \cdot 10x^{10-1} - 3 \cdot 1 + 0 = 15x^2 + 14x^6 + 80x^9 - 3$

2) $\left(10x^{12} + \frac{2}{x^5} + 2\sqrt{x}\right)' = \left(\text{переведем дробь } \frac{2}{x^5} = 2x^{-5}\right) 10 \cdot 12x^{12-1} + 2 \cdot (-5)x^{-5-1} + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 120x^{11} - 10x^{-6} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 120x^{11} - \frac{10}{x^6} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $(2x^{15} + 3x^6 + x - 5)' = 30x^{14} + 18x^5 + 1$

2. **Основные правила дифференцирования:**

I. Производная суммы (разности):

$$(u + v)' = u' + v' \text{ ,}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = sin(x) + x^3$

Решение: $y' = (\sin x)' + (x^3)' = \cos x + 3x^{3-1} = \cos x + 3x^2$

Пример 2. Найти производную функции $y = ln(x) + arctg(x)$

Решение: $y' = (\ln(x) + arctg(x))' = \ln(x)' + arctg(x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2}$

В этих примерах значения производных от $\sin x$, $\ln x$, $arctgx$ взяли из таблицы производных

II. Постоянный множитель выносится за знак производной

$$(Cu)' = C\,u',$$

Пример:

1) $(6tg\,x)' = 6 \cdot (tg\,x)' = \frac{6}{cos^2 x}$
2) $(-5x^{-3} + 7)' = -5 \cdot (-3)x^{-3-1} + 0 = 15x^{-4}$ обратите внимание, что в этом примере число 7 – свободный коэффициент, производная которого равна 0. А число -5 – постоянный множитель, который не принимает участие в вычислении производной.

III. ***Производная произведения***

Пусть функция представляет собой произведения двух функций u и υ.

(u - у υ-вэ).

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Пример 1

$\boxed{u'v+uv'}$

1) $\Big(\underbrace{(5x+2)}_{u}\underbrace{(3-4x)}_{v}\Big)' =$

$= \overbrace{(5x+2)'}^{u'}\cdot\underbrace{(3-4x)}_{v} + \overbrace{(5x+2)}^{u}\underbrace{(3-4x)'}_{v'} =$

производную вычисляем только там, где стоит знак "'"! остальное просто переписываем!

$= (5\cdot x' + 2')\cdot(3-4x) + (5x+2)\cdot(3'-4x') =$

$= (5\cdot 1+0)(3-4x) + (5x+2)(0-4\cdot 1) =$

$= 5(3-4x) + (5x+2)\cdot(-4) =$

$= 15 - 20x - 20x - 8 = -40x+7$

ответ

$(u'v+uv')$

Пример 2

$$\Big(\underbrace{(x^3+3x)}_{u}\underbrace{\sin x}_{v}\Big)' = \overbrace{(x^3+3x)'}^{u'}\cdot\underbrace{\sin x}_{v} +$$

$$+\underbrace{(x^3+3x)}_{u}\cdot\overbrace{(\sin x)'}^{v'} = \left(3x^{3-1}+3\cdot 1\right)\cdot \sin x$$

$$+ (x^3+3x)\cdot(\cos x) =$$

$$= (3x^2+3)\sin x + (x^3+3x)\cdot\cos x$$

ответ (дальше можно

не раскрывать

Пример 3

$$\left(x^3\cdot(x^2+2x)\right)' = \overbrace{(x^3)'}^{u'}\cdot\underbrace{(x^3+2x)}_{v} +$$

$$+\underbrace{x^3}_{u}\cdot\overbrace{(x^2+2x)'}^{v'} = 3x^2\cdot(x^3+2x) +$$

$$+x^3(2x+2) = 3x^5 + \underline{6x^3} + 2x^4 + \underline{2x^3} =$$

$$= 3x^5 + 2x^4 + 8x^3;$$

Пример 5

$$\boxed{u'v+uv'}$$

$$(\underbrace{\sin x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x}_{v})' = (\underbrace{\sin x}_{u'})' \cdot \overbrace{\cos x}^{v} +$$

$$+ \overbrace{\sin x}^{u} \cdot \underbrace{(\cos x)'}_{v'} = \cos x \cdot \cos x +$$

$$+ \sin x \cdot (-\sin x) = \underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\text{формула косинуса двойного угла}} =$$

$$= \cos 2x$$

Упражнения (самостоятельно)

Найти производную функции:

a) (10x-3)(5+7x)

b) 4x*(3x+5)

c) $2x^3(8x-4x^2)$

IV. Производная дроби

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Пример 1

$$\left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)$$

$$\left(\frac{\overbrace{3x+1}^{u}}{\underbrace{2x-4}_{v}}\right)' = \frac{(3x+1)'\cdot(2x-4)-(3x+1)(2x-4)'}{(2x-4)^2} =$$

не раскрываем!

$$= \frac{(3\cdot 1+0)(2x-4)-(3x+1)(2\cdot 1-0)}{(2x-4)^2} =$$

$$= \frac{3\cdot(2x-4)-(3x+1)\cdot 2}{(2x-4)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{6x}-12-\cancel{6x}+2}{(2x-4)^2} = \frac{-10}{(2x-4)^2}$$

ответ

Пример 2

$$\left(\frac{\overbrace{\sin x}^{u}}{\underbrace{\cos x}_{v}}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ ответ}$$

Пример 3

$$\left(\frac{\overbrace{2x^2-3x+4}^{u}}{\underbrace{2x}_{v}}\right)' = \frac{(2x^2-3x+4)'\cdot 2x - (2x^2-3x+4)\cdot(2x)'}{(2x)^2} = \frac{(2\cdot 2x - 3\cdot 1 + 0)\cdot 2x - (2x^2-3x+4)\cdot 2}{4x^2} =$$

$$= \frac{(4x-3)2x - 4x^2 + 6x - 8}{4x^2}$$

$$= \frac{8x^2 - \cancel{6x} - 4x^2 + \cancel{6x} - 8}{4x^2} = \frac{4x^2 - 8}{4x^2} =$$

$$= \frac{\cancel{4}(x^2 - 2)}{\cancel{4}x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$ ответ

Упражнения (самостоятельно)

Найти производную дроби:

1) $\frac{10+3x}{2x+7}$ 2) $\frac{9x-2}{3+4x}$

3) $\frac{5x+2}{6-7x}$ 4) $\frac{2x^2+1}{x}$

5) $\frac{8x-1}{7+3x}$

Тема: Вычисление производной функции.

Учебник: Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика в задачах с решениями, учебное пособие.

Задание 1.Вычислить производную функции:

197. Найти производную функции $y = 9x^5$.

Решение. Используя правило V и формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, получим

$$y' = (9x^5)' = 9 \cdot 5x^4 = 45x^4.$$

При навыке промежуточные записи можно пропустить:

$$(9x^5)' = 45x^4.$$

198. Найти производную функции $y = x^3 + 6x$.

Решение. В правой части имеем алгебраическую сумму дифференцируемых функций, поэтому применяем правило III:

$$(x^3 + 6x)' = (x^3)' + (6x)'.$$

Используя результаты примеров 194 и 191, получим

$$(x^3)' + (6x)' = 3x^2 + 6.$$

199. Найти производную функции $y = 5x^2 - x + 4$.
Решение. $(5x^2 - x + 4)' = (5x^2)' - (x)' + (4)' = 5(x^2)' - 1 = 10x - 1$.

200—214. Найти производные следующих функций:

200. $y = 3x^{-2}$. **201.** $y = 4x^{-3}$. **202.** $y = 2x^{1/3}$.
203. $y = 2x^{1/4}$. **204.** $y = 3x^{-2/3}$. **205.** $y = 5x^{-3/5}$.
206. $y = 5\sqrt[5]{x^2}$. **207.** $y = 3\sqrt[3]{x}$. **208.** $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Задание 2. Вычислить значение производной в указанных точках

***Пример*: найти $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, если $f(x) = \frac{1}{x^4}$**

$$f(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$$
$$f'(x) = (x^{-4})' = -4 \cdot x^{-4-1} = -4x^{-5}$$

По условию $x = \frac{1}{2}, f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = -4 \cdot 2^5 = -128$

| использовали свойство степени $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n$

Вычислить аналогично:

1. $f'(9),\ f(x) = \sqrt{x}$
2. $f'(-1),\ f(x) = 3x^3 - 2x - 5$
3. $f'(-0,2),\ f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$

Задание 3. Продифференцировать функцию:

Пример 1: $y = 2x^3(x^6 - 1)$

Решение.

1 способ

Используем правило III – правило вычисления производной от произведения функций, получим:

$$y' = (2x^3(x^6 - 1))' = (2x^3)'(x^6 - 1) + 2x^3(x^6 - 1)'$$
$$= 2 \cdot 3x^{3-1} \cdot (x^6 - 1) + 2x^3 \cdot 6x^{6-1} = 6x^2 \cdot (x^6 - 1) + 2x^3 \cdot 6x^5$$
$$= 6x^8 - 6x^2 + 12x^8 = 18x^8 - 6x^2$$

2 способ

Предварительно раскроем скобки: $y = 2x^3(x^6 - 1) = 2x^9 - 2x^3$

Используем правило вычисления производной степенной функции:

$$y' = (2x^3(x^6 - 1))' = (2x^9 - 2x^3)' = (2x^9)' + (2x^3)' = 2 \cdot 9x^{9-1} + 2 \cdot 3x^{3-1}$$
$$= 18x^8 - 6x^2$$

Способ решения вы выбираете сами!

222—227. Найти производные следующих функций:

222. $y=(x^3-2)(x^2+x+1)$. **223.** $f(x)=(x+2)(2x^3-x)$.

224. $f(t)=(t^2+1)(t^3-t)$. **225.** $f(u)=(u^2-u+1)(2u^3+1)$.

226. $y=(z^2+1)(z^3-1)$. **227.** $y=(x^4-3)(x^2+2)$.

Пример 2: $y=\frac{x^2-2}{x^2+2}$

Решение. Применяем правило VI:

$$y'=\frac{(x^2-2)'(x^2+2)-(x^2+2)'(x^2-2)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x(x^2+2)-2x(x^2-2)}{(x^2+2)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+2-x^2+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x\cdot 4}{(x^2+2)^2}=\frac{8x}{(x^2+2)^2}.$$

229. Найти производную функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение. I способ. Применяем правило VI при $u=1$, $v=x$. Тогда получим

$$y'=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}.$$

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию к виду $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, а затем применим формулу $(x^n)=nx^{n-1}$:

$$y'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-2}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

230—237. Найти производные следующих функций:

230. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. **231.** $y=\frac{1-x^5}{1+x^5}$.

232. $y=\frac{3-x}{x^2}$. **233.** $y=\frac{x^2-1}{x^2}$.

234. $y=\frac{1+x^2}{3x}$. **235.** $y=\frac{2+x^3}{2x}$.

236. $y=\frac{x^2-x+2}{x^2}$. **237.** $y=\frac{1}{1-x^2}$.