Задание для студентов гр. 5.1 на период с 27.04.2020 – 30.04.2020 (2 часа – 1 пара)

Дисциплина «Математика»
Преподаватель Токарская М.С.
Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru
Тел. 89147174421 – WhatsApp – если есть вопросы.

Все задания отправлять на почту!!!!!

Урок 1

Тема: «Тригонометрические уравнения»

Цель: изучить тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным, однородные тригонометрические уравнения и способы их решения

Учебники:

http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf - учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. **Гл.1 §3 п.11**

Конспект записать!

1. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным.

Метод сведения к квадратному уравнению состоит в том, что, пользуясь изученными формулами, надо преобразовать уравнение к такому виду, чтобы какую-то функцию (например, sin x или cos x) или комбинацию функций обозначить через y, получив при этом квадратное уравнение относительно y.

Пример 1 $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Введем новую переменную $t = \sin x$. *Причем,* $t \in [-1; 1]$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

Это простейшее квадратное уравнение, которое решаем как обычно:

a = 2, b = 1, c = -1

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Возвращаем замену переменной обратно:

$$t_1 = \frac{1}{2} \to \sin x = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = -1 \to \sin x = -1$$

Это простейшие тригонометрические уравнения, которые решаем при помощи формул:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$\sin x = -1$$

это частный случай

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z.$$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in Z, \; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n \in Z$

Пример 2. $\boldsymbol{6sin^2x + 5cosx - 2 = 0}$
Используем основное тригонометрическое тождество $sin^2x + cos^2x = 1$.
Выразим $sin^2x = 1 - cos^2x$

$$\mathbf{6}(1 - cos^2x) + \mathbf{5cos\,x - 2 = 0}$$

$$\mathbf{6 - 6cos^2x + 5cos\,x - 2 = 0}$$

$$\mathbf{-6cos^2x + 5cos\,x + 4 = 0}$$

Введем новую переменную $t = cos\,x$. *Причем,* $t \in [-1; 1]$

$$\mathbf{-6t + 5t + 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot (-6) \cdot (4) = 121}$$

$$\boldsymbol{t_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{121}}{-12} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}}$$

$\boldsymbol{t_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - \sqrt{121}}{4} = \frac{-16}{-12} = \frac{4}{3} > 1}$, значит данное число нам не подходит

Возвращаем замену переменной обратно:

$$\boldsymbol{t_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow cos\,x = -\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{x = \mp arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n\epsilon Z}$$

$$\boldsymbol{x = \mp\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z}$$

Ответ: $\boldsymbol{x = \mp\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z}$

Пример 3. $\boldsymbol{4 - cos^2x = 4sinx}$

Используем основное тригонометрическое тождество $sin^2x + cos^2x = 1$.
Вместо $\cos^2 x$ подставим тождественное ему выражение $1 - \sin^2 x$.
Тогда исходное уравнение примет вид

$$4 - (1 - \sin^2 x) = 4\sin x$$

$$3 + \sin^2 x = 4\sin x$$

$$\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$$

Если ввести y = sin x , получим квадратное уравнение

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

Оно имеет корни 1 и 3. Значит, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

sin x = 1 или sin x = 3.

Уравнение sin x = 1 имеет решение x = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$n, n$\in Z$.

Уравнение sin x = 3 решений не имеет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

2. Однородные тригонометрические уравнения

Покажем, как решать однородное уравнение 1-й степени, т.е. $a\sin x + b\cos x = 0$

Пример 1. ***Решить уравнение*** $5\sin x - 2\cos x = 0$.

Поделим обе части уравнения на cos x или sin x.

Но предварительно надо доказать, что это выражение никогда не обращается в нуль.

Предположим, что cos x=0. Тогда 5sin x-2·0=0 $\Leftrightarrow$ sin x=0.

Получается, что если sin x=0, то и cos x=0 , чего быть не может ввиду равенства $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Значит можно поделить уравнение на cos x: $5\frac{\sin x}{\cos x} - 2\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$

Получим уравнение **5tg x-2=0**. Решив его (см.выше как), получим: $x = arctg\frac{2}{5} + \pi n, n \in Z$.

Решение однородных уравнений вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ ***начинается с того, что обе части уравнения делят на*** $\boldsymbol{\cos^2 x}$ или $\boldsymbol{\sin^2 x}$.

Пример 2. $12\sin^2 x + 3\sin 2x - 2\cos^2 x = 2$.

Решение. Данное уравнение не является однородным. Но его можно превратить в однородное, заменив:

3sin2x = 3*2 sinx*cosx = 6sin x* cos x

$2*1 = 2*(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

Приведя подобные слагаемые, получим уравнение

$10\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 0$.

Аналогично решению примера 1, докажем, что cos x$\neq 0$.

Тогда можно обе части уравнения поделить на $\cos^2 x$. Получим:

$10tg^2 x + 6tgx - 4 = 0 \Leftrightarrow tgx = -1$ или $tgx = \frac{2}{5}$.

Отсюда

$x_1 = arctg\frac{2}{5} + \pi n, n \in Z$

$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Ответ:

$$x_1 = arctg\frac{2}{5} + \pi n, n \in Z$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

Решить № 164 (б, 165 (в), № 166 (а,б), № 167 (а,в), № 169 (а,г)