	Задание для студентов гр. 5.1а на период с 24.03.2020 – 11.04.2020 (12 часов) Дисциплина «Математика» Преподаватель Токарская М.С. Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru Тел. 89147174421 – WhatsApp
5.1а	Учебники: 1. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf - учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. 2. Прилагаемые конспекты преподавателя. задание: **1.** Составить конспект по теме «Тригонометрические уравнения» **Гл.1, §3, п.9, п.11 (выписать формулы с примерами)** 2. Решить № 136, 138 3. Решить самостоятельную работу – Приложение 3 (варианты идут по списку/рапортичке и повторяются каждые 4 человека)

Приложение 1. Тема: «Простейшие тригонометрические уравнения»

Простейшими тригонометрическими уравнениями **называют уравнения вида:**

$$\sin x = a, \quad \cos x = a, \quad \operatorname{tg} x = a, \quad \operatorname{ctg} x = a.$$

где a – произвольное число.

Например: $sinx = 0{,}6,\ cosx = \frac{1}{2}, tgx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и т. д.

Решение уравнения **$\sin x = a$**

Обычная форма записи решения	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\arcsin a + \pi + 2\pi n, n \in Z$
Ограничения на число a	В случае, когда $a \notin [-1;1]$, уравнение решений не имеет

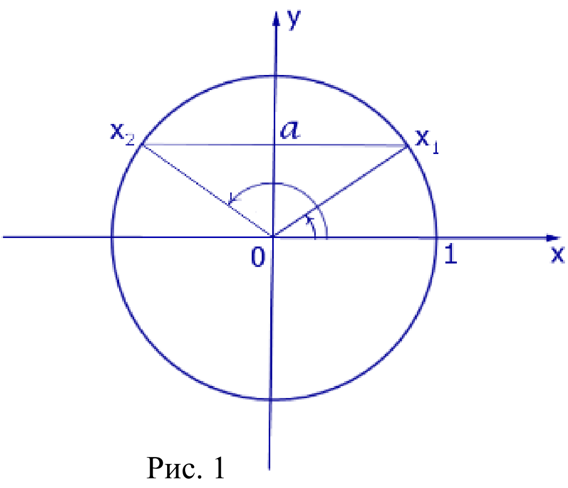


Рис. 1

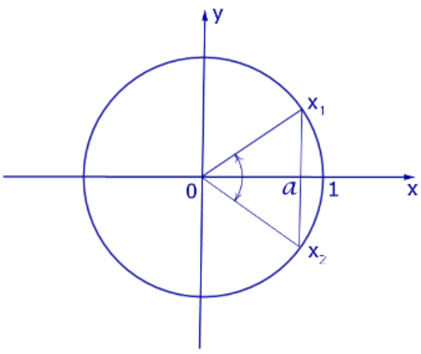
Графическое обоснование решения уравнения $\sin x = a$ представлено на рисунке 1

Частные случаи решения уравнений $\sin x = a$

Уравнение	Решение
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ Или $\boldsymbol{sinx} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = -\frac{1}{2}$	$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = 0$	$x = \pi n, n \in Z$
$\sin x = \frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boldsymbol{sinx} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Решение уравнения **$\cos x = a$**

Обычная форма записи решения	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \arccos a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\arccos a + 2\pi n, n \in Z$



Ограничения на число a	В случае, когда $a \notin [-1;1]$, уравнение решений не имеет

Графическое обоснование решения уравнения cos x = a представлено на рисунке 2

Частные случаи решения уравнений cos x = a

Уравнение	Решение
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ Или $\boldsymbol{cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}}$	$x_1 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\cos x = \frac{1}{2}$	$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\boldsymbol{cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$	$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi n, n \in Z$

Решение уравнения tg x = a

Обычная форма записи решения:	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in Z$

Более удобная форма записи решения	$x_1 = \mathbf{arctg}\ a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \mathbf{arctg}\ a + \pi + 2\pi n, n \in Z$
Ограничения на число *a*	Ограничений нет

Частные случаи решения уравнений tg *x* = *a*

Уравнение	Решение
$\mathbf{tg}\ x = -\sqrt{3}$	$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
tg $x = -1$	$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\mathbf{tg}\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
tg $x = 0$	$x = \pi n, n \in Z$
$\mathbf{tg}\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
tg $x = 1$	$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\mathbf{tg}\ x = \sqrt{3}$	$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Решение уравнения*   ctg *x* = *a

Обычная форма записи решения	$x = \mathbf{arcctg}\ a + \pi n, n \in Z$
Более удобная форма записи решения	$x_1 = \mathbf{arcctg}\ a + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \mathbf{arcctg}\ a + \pi + 2\pi n, n \in Z$
Ограничения на число *a*	Ограничений нет

Частные случаи решения уравнений ctg *x* = *a*

Уравнение	Решение
$\mathrm{ctg}\ x = -\sqrt{3}$	$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
ctg x = – 1	$x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\mathrm{ctg}\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
ctg x = 0	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$\mathrm{ctg}\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
ctg x = 1	$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$
$\mathrm{ctg}\ x = \sqrt{3}$	$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$ $x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Приложение 2.

Карточка – помощник

Тригонометрические уравнения.

1. **Квадратные тригонометрические уравнения.**

   Пример.

   $2sin^2x + sinx - 1 = 0$

   Введем новую переменную y = sin x. Подставим её в уравнение, получим:

   $2y^2 + y - 1 = 0$

Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат $y_1 = \frac{1}{2}$ и $y_2 = -1$. Следовательно,

$\sin x_1 = \frac{1}{2}$ и $\sin x_2 = -1$

$x_1 = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k\epsilon Z$, т.е. $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z$

$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k\epsilon Z,\ x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$

2. **Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.**

Пример:

$\sin^2 x + 2\sin x = 0$,

$\sin x(\sin x + 2) = 0$,

$\sin x = 0$ или $\sin x + 2 = 0$

$x = \pi n$, $n \in Z$ $\sin x = -2$

$|-2| > 1$ не имеет решения, т.к. $-2 < -1$

Ответ: πn, $n \in Z$

3. **Уравнения, сводящиеся к квадратным.**

Пример: $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

Заменив, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим:

$2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x = 0$,

$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$,

$2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$,

пусть $\cos x = t$, тогда $2t^2 - 3t - 2 = 0$, $D = 9 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 25$, $\sqrt{D} = 5$

$t = \frac{3 \pm 5}{4}$, $t_1 = 2$ $t_2 = -\frac{1}{2}$

Составим два простейших уравнения:

$cosx = 2$ и $cosx = -\frac{1}{2}$, $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$

не имеет решений, т.к. $2 > 1$ $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ $n \in Z$

4. **Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$**

Уравнение вида $a\sin x + b\cos x = 0$,

$a\cos^2 + b\sin x\cos x + c\sin^2 x = 0$, где $a, b, c \neq 0$ числа называются однородными (у всех слагаемых сумма показателей одинакова) приводятся к алгебраическим относительно tgx путем деления обеих частей уравнения на $\cos x \neq 0$, и $\cos^2 x \neq 0$ соответственно.

Пример1: Пример 2:

$\sin 2x + 2\cos 2x = 0,\ |\cos 2x \neq 0$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{2\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{0}{\cos 2x},$$

$$tg 2x + 2 = 0,$$

$$tg 2x = -2$$

$$2x = arctg(-2) + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{1}{2} arctg 2 + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2} arctg 2 + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$

$6\sin^2 x + 4\sin x\cos x = 1$

$$6\sin^2 x + 4\sin x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$$

$$5\sin^2 x + 4\sin x\cos x - \cos^2 x = 0\ |\cos^2 x$$

$$5tg^2 x + 4tgx - 1 = 0$$

$$tgx = t,\ 5t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$D = 16 + 20 = 36,\ t = -\frac{4 \pm 6}{10},\ t_1 = \frac{1}{5},\ t_2 = -1$$

$$tgx = \frac{1}{5},\ tgx = -1$$

$$x = arctg\frac{1}{5} + \pi n,\ n \in Z;\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi m,\ m \in Z$$

Ответ: $x_1 = arctg\frac{1}{5} + \pi n, n \epsilon Z,\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi m, m \epsilon Z$

Алгоритмы решения однородных тригонометрических уравнений

Уравнения вида $a\sin x + b\cos x = 0$

где $a \neq 0,\ b \neq 0$.

1. Разделим обе части уравнения почленно на $\cos x \neq 0$, получим:

$$\frac{a\sin x}{\cos x} + \frac{b\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

2. Получим простейшее тригонометрическое уравнение:

$$atgx = -b$$

$$tgx = -\frac{b}{a}$$

3. Записать ответ: $x = arctg\left(-\frac{b}{a}\right) + \pi n$, где $n \in Z$

Уравнение вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$

1. Если $a \neq 0$, то уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$:

$$atg^2 x + btgx + c = 0$$

(квадратное уравнение относительно новой переменной $t = tgx$)

2. Если $a = 0$, то $a\sin^2 x = 0$ и уравнение $b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ решается методом разложения на множители: за скобки выносится $\cos x$

Приложение 3.

Самостоятельная работа

1 вариант

1. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$
4. $\cos(5x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $tg\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
6. $\sin 6x = \frac{19}{8}$
7. $2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
8. $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$

Самостоятельная работа

2 вариант

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\sin(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}$
5. $tg\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
6. $\cos 3x = -\frac{5}{13}$
7. $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
8. $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$

Самостоятельная работа

3 вариант

1. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
3. $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$
4. $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5. $tg\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
6. $\cos 6x = -\frac{9}{8}$
7. $-4\sin^2 x - 6\sin x + 4 = 0$
8. $2\cos^2 x + \sin x\cos x = 0$

Самостоятельная работа

4 вариант

1. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\sin(\frac{x}{4}) = \frac{1}{2}$
5. $tg\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$
6. $\sin 3x = -\frac{5}{3}$
7. $-4\cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$
8. $2\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$