

**Задание для студентов гр. ОП 1 на период с 20.04.2020 – 26.04.2020 (4 часа
– 2 пары)**

Дисциплина «Математика»

Преподаватель Токарская М.С.

Почта для обратной связи: maya_tok@mail.ru

Тел. 89147174421 – WhatsApp – если есть вопросы.

Все задания отправлять на почту!!!!

Уважаемые студенты!

Прошу вас отнестись со всей серьезностью к новой теме!

Не игнорируете ссылки, которые вам будут даны!!!

Внимательно и вдумчиво прочтите лекцию!! И только после этого приступайте к написанию конспекта!!!

Учебники:

1. http://lib.maupfib.kg/wp-content/uploads/2015/12/Algebra_i_nachala_mat_analiz.pdf

- учебник «Алгебра и начала математического анализа» Колмогоров А.Н. Гл.2 §4 п.12-13, 15

2. <https://ru.calameo.com/read/0007452692fa11c1f518e> - Башмаков М.И., Математика (Начальное и среднее профессиональное образование) – Гл.9, занятия 1-5

3. http://mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html - Понятие производной, Александр Емелин, 2010-2020.

Тема 1. Приращение функции

Пусть нам дана какая-то функция $y=f(x)$.

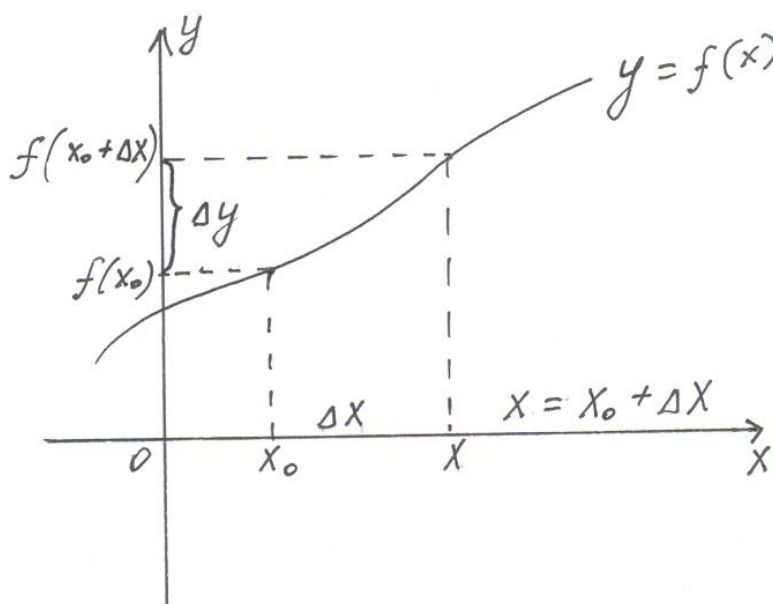
Проведем произвольную кривую линию и будем считать, что это график нашей функции.

Возьмем на оси ОХ первоначальное значение аргумента обозначим его X_0 .

Найдем графически соответствующее ему значение функции $y_0=f(x_0)$.

Возьмем на оси ОХ новое значение аргумента, обозначим его X .

Разность между новым



значением аргумента x и первоначальным x_0 – это и есть приращение аргумента Δx (дельта x).

Определение. Разность между новым значением аргумента X и первоначальным X_0 называется **приращением аргумента**

Обозначается: $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента (дельта икс равно икс минус икс нулевое).

Из этого равенства следует, что

$$x = x_0 + \Delta x$$

Найдем графически значение функции в точке x , то есть в точке $x_0 + \Delta x$.

Определение. Разность между новым значением функции и первоначальным называется **приращением функции**.

Записывается так: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

$f(x_0 + \Delta x)$ – новое значение функции (эф от икс нулевое плюс дельта икс).
 $f(x_0)$ – первоначальное значение функции.

Δf – приращение к функции (дельта эф).

Пример №1. Дано: $f(x) = -\frac{2}{x}$; $X_0 = -2$; $\Delta X = 0.1$

Найти приращение функции f в точке X_0 , т.е. Δf .

Решение:

1. Формула $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
2. $X_0 + \Delta X = -2 + 0.1 = -1.9$
3. $f(x_0 + \Delta x) = f(-1.9) = \frac{-2}{-1.9} = \frac{2}{1.9} = \frac{20}{19} = 1\frac{1}{19}$
4. $f(x_0) = f(-2) = \frac{-2}{-2} = \frac{2}{2} = 1$
5. $\Delta f = 1\frac{1}{19} - 1 = \frac{1}{19}$;

Ответ: $\frac{1}{19}$;

Пример №2. Дано: $f(x) = 3x + 1$; $x_0 = 5$; $\Delta x = 0.001$.

Найти: Δf

Решение:

1. формула $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
2. $x_0 + \Delta x = 5 + 0.001 = 5.001$;
3. $f(x_0 + \Delta x) = f(5.001) = 3 * 5.001 + 1 = 15.003 + 1 = 16.003$;
4. $f(x_0) = f(5) = 3 * 5 + 1 = 16$
5. $\Delta f = 16.003 - 16 = 0.003$ Ответ: 0,003.

Тема 2. Определение производной

Определение. Аргумент - это независимая переменная величина (x).

Определение. Функция - это зависимая переменная величина (y).

Пример.

Движение характеризуют переменные величины: t —время, S - расстояние, V - скорость.

t - время – это независимая величина, для математики – это аргумент.

S – расстояние- это зависимая переменная величина, для математики – это функция.

V - скорость при движении может быть переменной и может быть постоянной величиной.

Рассмотрим пример движения поезда.

Например, поезд идет из Владивостока в Москву. Мы решили определить его скорость. Сели в Красноярске, вышли в Ачинске и говорим, что расстояние 180км мы проехали за 3 часа.

Получается, что скорость поезда $V = \frac{180}{3} = 60 \left(\frac{\text{км}}{\text{час}} \right)$

Но на этом пути было несколько остановок, когда на прямолинейном участке пути она была и 80 и 90 км/час вблизи вокзалов при остановке и при отправлении была разной: и 1и 2, и 5 и 10 (км/час). А мы говорим, что скорость поезда 60(км/час)

- О какой скорости идет речь?

Мы говорим о средней скорости:

- То есть, чтобы найти среднюю скорость, надо отрезок пути разделить на соответствующий отрезок времени.

$$V_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

- А теперь вспомним: какая скорость называется мгновенной?

- Мгновенная скорость – это средняя скорость за очень маленький промежуток времени, близкий к нулю.

т.е. $V_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ (в данном примере \lim – предельное/крайнее значение отношения)

А теперь введем в формулу мгновенной скорости $V_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

$\Delta t \rightarrow 0$ математические обозначения.

Т.к. расстояние S для математики - это функция, то обозначим отрезок пути вместо ΔS знаком Δy .

Т.к. время t для математики аргумент, то отрезок времени Δt обозначим за Δx .

- А чем же для математики является мгновенная скорость?

- Скорость для математики является производной и обозначается

$$y' \text{ или } f'(x)$$

(читается игрек штрих или эф штрих от икс).

- Итак, формулу мгновенной скорости мы теперь можем записать в математическом виде:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Это и есть формула производной.

Отрезок $\Delta x \rightarrow 0$ можно считать точкой.

Определение. Производной функции f в точке x_0 называется отношение приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Процесс отыскания производной называется - дифференцированием

На приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,

Поэтому формулу производной можем записать в виде :

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (*)$$

Т.к. формулу производной функции мы получим из формулы скорости, то можно сказать, что:

Физический смысл производной - это скорость изменения функции

Пример 1. Дана функция $f(x) = 5x + 3$

Найти производную $f'(x_0)$.

Решение.

Для решения данного упражнения будем пользоваться формулой (*).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5(x_0 + \Delta x) + 3 - (5x_0 + 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5x_0 + 5\Delta x + 3 - 5x_0 - 3}{\Delta x} = \frac{5\Delta x}{\Delta x} = 5$$

Ответ: $(5x+3)' = 5$

Пример 2. Дана функция $f(x) = 4 - 7x$

Найти производную $f'(x_0)$

Решение

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 7(x_0 + \Delta x) - (4 - 7x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 - 7x_0 - 7\Delta x - 4 + 7x_0}{\Delta x} = \frac{-7\Delta x}{\Delta x} = -7$$

Ответ:

Пример 3. Дана функция $f(x) = x$. Найти производную $f'(x_0)$

Решение:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

Ответ: $x' = 1$.

Получим формулу $x' = 1$ - производная икса равна единице.

Пример 4. Дана функция $f(x)=x^2$. Найти производную $f'(x)$

Решение: Для решения этого упражнения нам будет нужна формула квадрат суммы двух чисел, имеющая вид: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 * \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x_0 * \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 + 0 = 2x_0$$

Т.к для обозначения первоначального значения аргумента мы сами ввели индекс нулевое, то можем записать ответ так: $(x^2)' = 2x$

Пример 5. Дана функция $f(x) = x^3$. Найти производную $f'(x_0)$

Решение: Для решения этого упражнения будем применять формулу куб суммы двух чисел, которая имеет вид:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 * \Delta x + 3x_0 * \Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2 * \Delta x + 3x_0 * \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0 * \Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 * \Delta x + \Delta x^2) =$$

$$= 3x_0^2 + 3x_0 * 0 + 0 = 3x_0^2 + 0 + 0 = 3x_0^2$$

Рассмотрев последние два примера

$$(x^2)' = 2x$$

$(x^3)' = 3x^2$, можно по аналогии записать, что

$(x^4)' = 4x^3$ или, например, $(x^{10})' = 10x^9$.

Итак, можно сделать вывод, что производная степенной функции в общем виде записывается так:

$$(x^n)' = n * x^{n-1}$$

Пример 6. Дана функция $f(x)=9$

Найти производную $f'(x_0)$

Решение.

$$f(x_0) = 9; f(x_0 + \Delta x) = 9$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - 9}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0;$$

Ответ : $9' = 0$

Вместо 9 могло быть любое другое постоянное число, обозначим буквой С [це] (константа).

Получили формулу $C' = 0$ - производная постоянной величины равна нулю.

Пользуясь этими формулами и вспомогательными формулами действий над степенями из школьного курса, а именно: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

выведем формулы для нахождения производных функций $f(x) = \frac{1}{x^n}$ и $f(x) = \sqrt{x}$

$$1) \left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -n * x^{-n-1} = -n * \frac{1}{x^{n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\text{Получили формулу } \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}} \quad (1)$$

Пример. 1) $\left(\frac{1}{x^9}\right)' = -\frac{9}{x^{10}}$

$$2) \left(\frac{1}{x^{15}}\right)' = -\frac{15}{x^{16}}$$

из формулы (1) следует формула

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Найдем производную функции $f(x) = \sqrt{x}$

Будем использовать формулы:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

Итак, получили новую формулу: производная корня квадратного имеет вид

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Упражнения

http://mathprofi.ru/kak_naiti_proizvodnuju.html - как вычислять производные

Найти производную функции:

1. $(4x^8 + 2x^5 + 0,125 - 10\sqrt{x})' = 4 \cdot 8x^{8-1} + 2 \cdot 5x^{5-1} + 0 - 10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 32x^7 + 10x^4 - \frac{5}{\sqrt{x}}$ (сократили 10 и 2)

самостоятельно:

2. $5x^3 + 2x^7 + 8x^{10} - 3x + 9$

3. $10x^{12} + \frac{2}{x^5} + 2\sqrt{x}$

4. $2x^{15} + 3x^6 + x - 5$

Все формулы дифференцирования запишем в таблицу (выучить!!!!)

1. $c' = 0, c = \text{const}$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

10. $(\text{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $(\text{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14. $(\text{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

15. $(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$